

# Μη Γραμμικοί Ταξινομητές - Μηχανές Διανυσματικής Στήριξης

ECE-TEL830 ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ

Αθανάσιος Κούτρας  
Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών,  
Παν. Πελοποννήσου

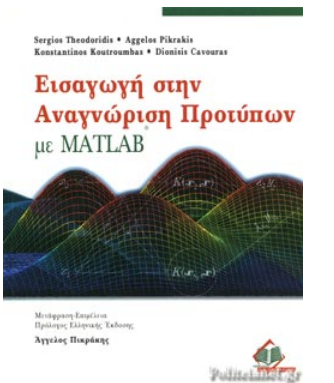
19 Απριλίου 2023

# Περίγραμμα διάλεξης

- 1 Εισαγωγή
- 2 Συνάρτηση διάκρισης και περιορισμοί
- 3 Πυρήνες μηχανών διανυσματικής στήριξης
- 4 Κριτήριο ταξινόμησης
- 5 Η αρχιτεκτονική του μη-γραμμικού SVM
- 6 Σχόλια - Παρατηρήσεις

# Υλικό μελέτης

Theodoridis S., Piskrakis, A., Koutroumbas K., Cavouras, D., "Εισαγωγή στην αναγνώριση προτύπων με MATLAB", ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2



# Εισαγωγή

- Στη διάλεξη αυτή θα παρουσιαστεί μια διαφορετική προσέγγιση για το σχεδιασμό πιο αποδοτικών ταξινομητών οι οποίοι μπορούν να εφαρμοστούν και να λειτουργήσουν καλύτερα σε προβλήματα μη γραμμικά διαχωρίσιμων κλάσεων από ότι οι γραμμικοί ταξινομητές που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενες διαλέξεις.
- Θα παρουσιάσουμε τη **μη-γραμμική περίπτωση** των μηχανών διανυσματικής στήριξης οι οποίες χρησιμοποιούνται σε πολλά από τα πραγματικά προβλήματα ταξινόμησης προτύπων.

# Μη γραμμικές Μηχανές Διανυσματικής Στήριξης (Support Vector Machines - SVM)

- Θεωρούμε ότι υπάρχει μια απεικόνιση της μορφής:

$$x \in R^l \rightarrow y \in R^k$$

από τον χώρο των χαρακτηριστικών εισόδου σε έναν  $k$ -διάστατο χώρο, όπου οι κλάσεις (μη γραμμικά διαχωρίσιμες) μπορούν να χωριστούν ικανοποιητικά από ένα υπερεπίπεδο.

- με βάση αυτά που παρουσιάσαμε σε προηγούμενη ενότητα, τα SVM θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τον σχεδιασμό του ταξινομητή - υπερεπίπεδο στον νέο  $k$ -διάστατο χώρο.
- από τις προηγούμενες διαλέξεις είδαμε ότι τα διανύσματα χαρακτηριστικών συμμετέχουν κατά ζεύγη μέσω της πράξης του εσωτερικού γινομένου σε όλους τους υπολογισμούς και η ταξινόμηση εκτελείται ανάλογα με το πρόσημο της ποσότητας:

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0 = \sum_{i=1}^{N_s} \lambda_i y_i \mathbf{x}_i^T \mathbf{x} + w_0$$

(παρατηρήστε τα εσωτερικά γινόμενα στον παραπάνω τύπο)

- μετά τον μετασχηματισμό των χαρακτηριστικών στον νέο χώρο, θα υπέθετε κάποιος ότι η πολυπλοκότητα του ταξινομητή είναι πολύ μεγαλύτερη, αφού το  $k$  είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το  $l$ , προκειμένου να καταστούν γραμμικά διαχωρίσιμες οι κλάσεις.
- Όμως προκύπτει ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων στον νέο υψηλότερης διάστασης χώρο, μπορεί να εκφραστεί ως **συνάρτηση** του εσωτερικού γινομένου των αντίστοιχων διανυσμάτων στον αρχικό χώρο χαρακτηριστικών
- Συνεπώς: Θεωρούμε μια απεικόνιση  $\phi(\cdot)$  των χαρακτηριστικών για την οποία (σύμφωνα με το θεώρημα του Mercer), ο υπολογισμός των εσωτερικών γινομένων αποδεικνύεται ότι ισούται με:

$$\langle \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{z}) \rangle = K(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

- η  $K(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  είναι μια συμμετρική, συνεχής συνάρτηση και ονομάζεται **πυρήνας** του SVM δικτύου.

# Πυρήνες μηχανών διανυσματικής στήριξης

- Τυπικά παραδείγματα πυρήνων που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές αναγνώρισης προτύπων είναι τα:

## Πολυώνυμα

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}^T \mathbf{z} + 1)^q, q > 0$$

## Συναρτήσεις ακτινικής βάσης (Radial Basis Functions)

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2}\right)$$

## Υπερβολική εφαπτομένη

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \tanh(\beta \mathbf{x}^T \mathbf{z} + \gamma)$$

με τις κατάλληλες τιμές των παραμέτρων  $\beta$  και  $\gamma$ , συνήθως  $\beta = 2, \gamma = 1$

- Μετά την επιλογή του κατάλληλου πυρήνα, το δυαδικό πρόβλημα βελτιστοποίησης καταλήγει στον γραμμικό ταξινομητή:
- ταξινόμησε το  $\mathbf{x}$  στην κατηγορία  $\omega_1(\omega_2)$  αν:

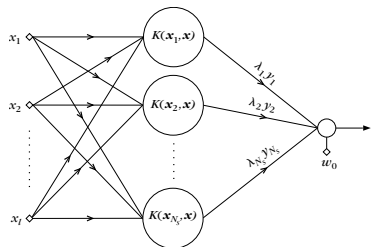
$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_s} \lambda_i y_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + w_0 > (<) 0$$

- λόγω της μη-γραμμικότητας της συνάρτησης του πυρήνα, ο ταξινομητής που προκύπτει είναι μη γραμμικός στον αρχικό χώρο  $R^l$

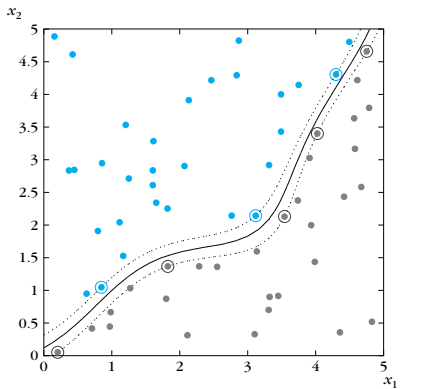


# Η αρχιτεκτονική του μη-γραμμικού SVM

- το σχήμα δείχνει την αρχιτεκτονική του δικτύου SVM.
- ο αριθμός των κόμβων καθορίζεται από τον αριθμό των διανυσμάτων στήριξης  $N_s$ .
- οι κόμβοι εκτελούν τα εσωτερικά γινόμενα μεταξύ της εικόνας του  $x$  και των αντίστοιχων εικόνων των διανυσμάτων στήριξης στο χώρο υψηλής διάστασης.
- **Προσοχή:** ο αριθμός των κόμβων δεν καθορίζεται από τον χρήστη (όπως σε άλλες αρχιτεκτονικές που θα δούμε αργότερα), αλλά προκύπτει μέσω της διαδικασίας βετιστοποίησης.



Σχήμα: Η SVM αρχιτεκτονική που χρησιμοποιεί συναρτήσεις πυρήνα



Σχήμα: Παράδειγμα μη γραμμικού SVM ταξινομητή για την περίπτωση δύο μη γραμμικά διαχωρίσιμων κλάσεων. Χρησιμοποιήθηκε πυρήνας RBF με  $\sigma = 1.75$

## Σχολιασμός

- η συνάρτηση υπερβολικής εφαπτομένης είναι μια σιγμοειδής συνάρτηση. Μπορεί να μοιάζει με την αρχιτεκτονική ενός perceptron δικτύου, αλλά εδώ ο αριθμός των κόμβων είναι αποτέλεσμα της διαδικασίας βελτιστοποίησης
- η υπολογιστική πολυπλοκότητα είναι ανεξάρτητη από τη διάσταση του χώρου του πυρήνα που απεικονίζεται ο χώρος των χαρακτηριστικών εισόδου. Έτσι παρακάμπτεται η κατάρα της διαστατικότητας.
- δεν είναι απαραίτητη η χρήση μεγάλου αριθμού παραμέτρων και για αυτό τα SVM παρουσιάζουν καλή επίδοση γενίκευσης.
- ο βασικός περιορισμός των SVM είναι ότι δεν έχει υπάρξει μέχρι τώρα αποτελεσματική πρακτική μέθοδος για την επιλογή της καλύτερης συνάρτησης πυρήνα. Για παράδειγμα για τον Gaussian πυρήνα, οι παράμετροι  $\sigma$  αλλά και εξομάλυνσης  $C$  στη συνάρτηση κόστους, επιλέγονται ώστε να μπορεί να βελτιστοποιηθεί ως προς το σφάλμα η επίδοση του ταξινομητή (υπερπαραμετροί - hyper parameters)

## Σχολιασμός

- η καλύτερη τακτική επιλογής είναι να λυθεί το SVM πρόβλημα για διαφορετικά σύνολα υπερπαραμέτρων και τελικά να επιλέξουμε τον SVM ταξινομητή που αντιστοιχεί στο σύνολο που βελτιστοποιεί τη απόδοση του ταξινομητή μέσα σε ένα φράγμα των παραμέτρων αυτών.
- οι ταξινομητές αυτοί έχουν χρησιμοποιηθεί σε μεγάλο εύρος εφαρμογών (αναγνώριση εικόνων, αντικειμένων, καρκινικών περιοχών, ταυτοποίηση ατόμων, ισοστάθμιση καναλιού, αναγνώριση spam αλληλογραφίας) με πολύ καλά αποτελέσματα.
- αυτό δείχνει την ικανότητα τους για γενίκευση



**Signal & Image Processing, Pattern Recognition Group (SIPPRE)**  
[www.sippre-group.com](http://www.sippre-group.com)