Εισαγωγή στη θεωρία της πληροφορίας

Αθανάσιος Κούτρας

Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών,
Παν. Πελοποννήσου

13 Δεκεμβρίου 2023

Περίγραμμα διάλεξης

Υλικό μελέτης

B.P. Lathi, Zhi Ding, **"Σύγχρονες Αναλογικές και Ψηφιακές Επικοινωνίες"**

Εισαγωγή

- από όλους τους τρόπους επικοινωνίας που παρουσιάσαμε μέχρι τώρα, κανένας δεν προσφέρει επικοινωνία χωρίς σφάλματα. Ο στόχος μας είναι να μειώσουμε την πιθανότητα σφάλματος P_e.
- όσο όμως υπάρχει θόρυβος στο κανάλι, η επικοινωνία δεν μπορεί να είναι απαλλαγμένη από σφάλματα.
- σε όλα τα ψηφιακά συστήματα η τιμή του P_e μεταβάλλεται ασυμπτωτικά ως e^{-kE_b}. Αυξάνοντας το E_b, μειώνουμε το P_e στο επιθυμητό επίπεδο.
- η ισχύς του σήματος δίνεται από $S_i = E_b R_b$ με R_b, τον ρυθμό μετάδοσης των bits.
- αύξηση του E_b σημαίνει ότι είτε αυξάνει η ισχύς του σήματος, είτε μειώνεται ο ρυθμός μεταφοράς bits (για δεδομένη τιμή ισχύος).
- επειδή η ισχύς δεν μπορεί να αυξηθεί πάνω από όριο, για να μειώσουμε το σφάλμα θα πρέπει να μειώσουμε τον ρυθμό μετάδοσης.

- σύμφωνα με τον Shannon για ένα κανάλι εφόσον ο ρυθμός μετάδοσης διατηρείται μέσα σε κάποιο όριο το οποίο προσδιορίζεται από το μέσο μετάδοσης (χωρητικότητα καναλιού), μπορούμε να πετύχουμε επικοινωνία χωρίς σφάλματα. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν κρατηθεί η τιμή του P_e κάτω από την χωρητικότητα του καναλιού.
- σύμφωνα με την θεωρία του Shannon, η παρουσία τυχαίας διαταραχής σε ένα κανάλι, δεν ορίζει από μόνη της ένα όριο στην ακρίβεια μετάδοσης.
- θέτει όμως όριο στο ρυθμό πληροφορίας για τον οποίο μπορεί να επιτευχθεί μια αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος ($P_e \to 0$)

Η πληροφορία ενός μηνύματος

Θωρήστε 3 μηνύματα τα οποία διαβάζουμε σε ένα ειδησεογραφικό ιστότοπο:

- *αύριο ο ήλιος θα ανατείλει από την ανατολή*
- *αύριο το διαστημόπλοιο Voyager IX θα συναντήσει τον μετεωρίτη που κατευθύνεται προς την γη*
- *αύριο θα πραγματοποιηθεί η πρώτη συνάντηση αντιπροσωπείας της γης με εξωγήινους αντιπροσώπους από τον πλανήτη Klingon*

Υπάρχει μια συσχέτιση μεταξύ της πληροφορίας που μεταφέρει ένα μήνυμα και της πιθανότητας πραγματοποίησης του γεγονότος που περιγράφει το μήνυμα αυτό

$$I \sim log \frac{1}{P}$$

Μέτρο της πληροφορίας ενός μηνύματος

- για να μπορέσουμε να κωδικοποιήσουμε δύο ισοπίθανα δυαδικά μηνύματα m_1, m_2, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε δυαδικά ψηφία **0** και **1**.
- για να μπορέσουμε να κωδικοποιήσουμε τέσσερα ισοπίθανα δυαδικά μηνύματα m_1, m_2, m_3, m_4, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τουλάχιστον δύο δυαδικά ψηφία ανά μήνυμα που δημιουργούν τέσσερις κωδικολέξεις $00, 01, 10, 11$.
- στην περίπτωση αυτή, ο χρόνος μετάδοσης που απαιτείται είναι διπλάσιος από τον προηγούμενο αφού για κάθε μήνυμα πρέπει να στείλουμε 2 bits αντί για 1
- για να μπορέσουμε να κωδικοποιήσουμε n μηνύματα, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε $log_2 n$ δυαδικά ψηφία.
- επειδή όλα τα μηνύματα μπορούν να θεωρηθούν ισοπίθανα με πιθανότητα $1/n$, για να κωδικοποιηθεί το κάθε μήνυμα θα χρειαστούμε $log_2(1/P)$ δυαδικά ψηφία.
- η πληροφορία I που περιέχεται σε ένα μήνυμα με πιθανότητα εμφάνισης P δίνεται από τη σχέση

$$I = k \cdot log_2 \frac{1}{P}$$

με k μια σταθερά η οποία θα πρέπει να καθοριστεί. Αν θωρήσουμε $k = 1$, τότε η πληροφορία εκφράζεται συναρτήσει δυαδικών μονάδων - bits.

Μέση πληροφορία ανά μήνυμα: Η εντροπία της πηγής

- έστω μια πηγή m χωρίς μνήμη η οποία εκπέμπει μηνύματα $m_1, m_2, \ldots, m_n$ με πιθανότητες $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (με άθροισμα όλων των πιθανοτήτων ίσο με 1).
- η πηγή χωρίς μνήμη σημαίνει ότι το κάθε μήνυμα που εκπέμπεται είναι ανεξάρτητο από το προηγούμενο ή προηγούμενα μηνύματα.
- το πληροφοριακό περιεχόμενο του μηνύματος m_i είναι το I_i και δίνεται από τη σχέση

$$I_i = log \frac{1}{P_i} \text{bits}$$

- η μέση πληροφορία ανά μήνυμα που εκπέμπεται από την πηγή είναι $\sum_{i=1}^{n} P_i I_i$ bits
- αυτή η μέση πληροφορία ονομάζεται εντροπία και συμβολίζεται με $H(m)$

- η εντροπία δίνεται από τη σχέση

$$H(m) = \sum_{i=1}^{n} P_i I_i = \sum_{i=1}^{n} P_i log \frac{1}{P_i} = -\sum_{i=1}^{n} P_i log P_i \text{ bits}$$

- η εντροπία αποτελεί ένα μέτρο της αβεβαιότητας και η κατανομή της πιθανότητας που δημιουργεί τη μέγιστη αβεβαιότητα χαρακτηρίζεται από τη μέγιστη εντροπία.
- λαμβάνει την μέγιστη τιμή της όταν όλα τα μηνύματα χαρακτηρίζονται από την ίδια πιθανότητα.

Κωδικοποίηση πηγής

- έχουμε δείξει ότι ότι ο ελάχιστος αριθμός των δυαδικών ψηφίων που απαιτούνται για την κωδικοποίηση ενός μηνύματος είναι ίσος με την εντροπία της πηγής αν όλα τα μηνύματα της πηγής χαρακτηρίζονται από την ίδια πιθανότητα.
- για την περίπτωση μη ισοπίθανων μηνυμάτων, ο μέσος αριθμός των δυαδικών ψηφίων ανά μήνυμα που απαιτείται για την κωδικοποίηση δίνεται από τη συνάρτηση $H(m)$.
- είναι αδύνατο να βρεθεί κώδικας που να αποκωδικοποιείται με μοναδικό τρόπο, το μέσο μήκος του οποίου να είναι μικρότερο από $H(m)$

Κώδικας Huffman

- αναφέραμε ότι το μέγιστο μήκος της λέξης σε έναν βέλτιστο κώδικα είναι ίσο με $H(m)$. Δυστυχώς όμως για να πετύχουμε αυτό το μήκος στη γενική περίπτωση θα πρέπει να κωδικοποιούμε μια ακολουθία N μηνυμάτων κάθε φορά με $N \rightarrow \infty$
- αν θέλουμε να κωδικοποιήσουμε το κάθε μήνυμα απευθείας χωρίς να χρησιμοποιήσουμε ακολουθίες μεγαλύτερου μήκους, τότε το μήκος ανά μήνυμα θα είναι μεγαλύτερο από $H(m)$.
- στην πράξη δεν θέλουμε να χρησιμοποιούμε ακολουθίες μεγάλου μήκους επειδή αυτές οδηγούν σε καθυστερήσεις μετάδοσης και απαιτείται πιο πολύπλοκος εξοπλισμός.
- ένας βέλτιστος κώδικας πηγής που χρησιμοποιείται είναι ο κώδικας Huffman.

Παράδειγμα κωδικοποίησης Huffman

Original Source		Reduced Sources			
Messages	Probabilities	S_1	S_2	S_3	S_4
m_1	0.30	0.30	0.30	0.43	0.57
m_2	0.25	0.25	0.27	0.30	0.43
m_3	0.15	0.18	0.25	0.27	
m_4	0.12	0.15	0.18		
m_5	0.08	0.12			
m_6	0.10				

Original Source			Reduced Sources							
Messages	Probabilities	Code	S_1		S_2		S_3		S_4	
m_1	0.30	00	0.30	00	0.30	00	0.43	1	0.57	0
m_2	0.25	10	0.25	10	0.27	01	0.30	00	0.43	1
m_3	0.15	010	0.18	11	0.25	10	0.27	01		
m_4	0.12	011	0.15	010	0.18	11				
m_5	0.08	110	0.12	011						
m_6	0.10	111								

- Για την παραπάνω περίπτωση, το μέσο μήκος του κώδικα είναι ίσο με

$$L = \sum_{i=1}^{n} P_i L_i = 2.45 \text{ bits}$$

- η εντροπία της πηγής ισούται με

$$H(m) = \sum_{i=1}^{n} P_i log_2 \frac{1}{P_i} = 2.418 \text{ bits}$$

- το κέρδος του κάθε κώδικα καταμετρείται από το μέσο μήκος του σε σχέση με την $H(m)$. Η αποδοτικότητα η του κώδικα ισούται με

$$\eta = \frac{H(m)}{L} = 0.976$$

- ο πλεονασμός γ ορίζεται ως

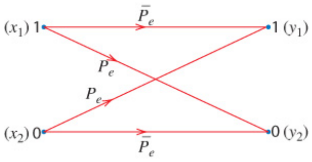
$$\gamma = 1 - \eta = 0.024$$

Επικοινωνία χωρίς σφάλματα μέσα από ένα κανάλι με θόρυβο

- όπως είδαμε πριν, τα μηνύματα μιας πηγής με εντροπία $H(m)$ μπορούν να κωδικοποιηθούν χρησιμοποιώντας ένα μέσο πλήθος $H(m)$ ψηφίων ανά μήνυμα.
- η κωδικοποίηση αυτή χαρακτηρίζεται από μηδενικό πλεονασμό. Αν σταλούν τα κωδικοποιημένα μηνύματα μέσα από ένα κανάλι με θόρυβο, τότε κάποια πληροφορία θα παραληφθεί με σφάλματα.
- είναι αδύνατο να επικοινωνήσουμε χωρίς σφάλματα χρησιμοποιώντας ένα κανάλι με θόρυβο όταν τα μηνύματα κωδικοποιούνται με μηδενικό πλεονασμό.
- ένα παράδειγμα κωδικοποίησης είναι με χρήση απλού κώδικα ελέγχου ισοτιμίας. Η προσθήκη ενός ψηφίου αυξάνει το μήκος της λέξης σε $H(m)+1$ οδηγώντας σε τιμή αποδοτικότητας $\eta = H(m)/[H(m)+1]$ και σε πλεονασμό $1-\eta = 1/[H(m)+1]$
- κατά συνέπεια η προσθήκη ενός επιπλέον ψηφίου ελέγχου αυξάνει τον πλεονασμό αλλά και βοηθά στην καταπολέμηση του θορύβου.

Μετάδοση μέσα από δυαδικά συμμετρικά κανάλια

- Έστω ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι με πιθανότητα σφάλματος P_e.
- Για επικοινωνία χωρίς σφάλματα μέσα από ένα τέτοιο κανάλι, τα μηνύματα από μια πηγή με εντροπία $H(m)$ πρέπει να κωδικοποιηθούν χρησιμοποιώντας δυαδικούς κώδικες με μήκος λέξης που να είναι τουλάχιστον ίσο με $H(m)/C_s$ όπου
$$C_s = 1 - \left[P_e log \frac{1}{P_e} + (1 - P_e) log \frac{1}{1 - P_e}\right]$$
- η παράμετρος $C_s < 1$ ονομάζεται χωρητικότητα του καναλιού. Επειδή έχουμε προσθέσει πλεονασμό για λόγους προστασίας απο σφάλματα, η αποδοτικότητα των κωδικών είναι πάντα μικρότερη από την τιμή C_s



Σχήμα: Δυαδικό συμμετρικό κανάλι

Χωρητικότητα ενός διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη

- θεωρούμε μια πηγή που περιέχει r σύμβολα $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Ο δέκτης παραλαμβάνει τα σύμβολα $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Τα σύμβολα y_k μπορεί να είναι ταυτόσημα με τα σύμβολα x_k, μπορεί και όχι ανάλογα με τον δέκτη.
- αν χρησιμοποιήσουμε δέκτες από το Κεφ 10, τότε τα σύμβολα που παραλαμβάνονται θα είναι τα ίδια με τα σύμβολα που μεταδόθηκαν.
- σε περίπτωση θορύβου όμως υπάρχει μια αβεβαιότητα όσον αφορά το μεταδιδόμενο σύμβολο όταν παραλαμβάνεται το σύμβολο y_j.
- η πιθανότητα υπό συνθήκη να έχει μεταδοθεί το x_i όταν έχει παραληφθεί το y_j είναι ίση με $P(x_i|y_j)$, ενώ η αβεβαιότητα είναι ίση με $log[1/P(x_i|y_j)]$.
- η μέση αβεβαιότητα για το μεταδιδόμενο σύμβολο x όταν παραλαμβάνεται το σύμβολο y είναι ίση με την εντροπία $H(x|y)$

$$H(x|y) = \sum_i \sum_j P(x_i, y_j) log \frac{1}{P(x_i|y_j)} \text{ bits ανά σύμβολο}$$

- ένα κανάλι μαζί με τον δέκτη του προσδιορίζεται από έναν πίνακα καναλιού που περιλαμβάνει τις **εκ των προτέρων** πιθανότητες πως έχει παραληφθεί το y_j ενώ έχει σταλεί το x_i.
- οι **εκ των υστέρων** πιθανότητες υπό συνθήκη (σύμφωνα με Bayes) είναι ίσες με

$$P(x_i|y_j) = \frac{P(y_j|x_i)P(x_i)}{\sum_i P(x_i)P(y_j|x_i)}$$

- σε περίπτωση που το κανάλι δεν έχει θόρυβο, τότε η μέση ποσότητα της πληροφορίας που παραλαμβάνεται είναι $H(x)$ bits ανά σύμβολο που παραλήφθηκε.
- εξαιτίας του θορύβου του καναλιού ακόμα και αν παραλάβουμε το y, εξακολουθούμε να έχουμε κάποια βεβαιότητα για το x το οποίο σχετίζεται με τη μέση ποσότητα $H(x|y)$
- συνεπώς η πληροφορία που παραλαμβάνει ο δέκτης είναι κατά μέσο όρο ίση με $I(x;y)$ bits ανά λαμβανόμενο σύμβολο

$$I(x;y) = H(x) - H(x|y)$$

- η παραπάνω πληροφορία ονομάζεται αμοιβαία πληροφορία των x και y

$$I(x;y) = \sum_i \sum_j P(x_i)P(y_j|x_i) log \frac{P(y_j|x_i)}{\sum_i P(x_i)P(y_j|x_i)}$$

- η αμοιβαία πληροφορία αποτελεί συνάρτηση των πιθανοτήτων του μεταδιδόμενου συμβόλου $P(x_i)$ και του πίνακα καναλιού. Για ένα συγκεκριμένο κανάλι η τιμή της θα είναι μέγιστη για κάποιο σύνολο πιθανοτήτων $P(x_i)$. Αυτή η μέγιστη τιμή είναι η χωρητικότητα του καναλιού C_s

$$C_s = \max_{P(x_i)} I(x;y) \text{ bits ανά σύμβολο}$$

- η χωρητικότητα του καναλιού μας δίνει τη μέγιστη δυνατή πληροφορία που είναι δυνατό να μεταδοθεί όταν μεταδίδεται ένα σύμβολο. Όταν μεταδίδονται K σύμβολα ανά δευτερόλεπτο, ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης της πληροφορίας ανά δευτερόλεπτο είναι KC_s.
- η παραπάνω είναι η χωρητικότητα του καναλιού σε μονάδες πληροφορίας ανά δευτερόλεπτο και συμβολίζεται με C

$$C = KC_s$$

Η χωρητικότητα ενός AWGN καναλιού χωρίς μνήμη

- στην περίπτωση που έχουμε ένα κανάλι με λευκό θόρυβο τύπου Gauss με μέση τετραγωνική τιμή N υπολογίζεται ότι η χωρητικότητα ενός καναλιού είναι ίση με

$$C_s = I_{max}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \frac{1}{2} log\left(\frac{S+N}{N}\right) = \frac{1}{2} log\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

- το παραπάνω υπολογίζει την μέγιστη πληροφορία που μεταδίδεται ανά δείγμα από το κανάλι ανά δευτερόλεπτο.
- αν όλα τα δείγματα είναι στατιστικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους, η συνολική πληροφορία που μεταδίδεται ανά δείγμα είναι ίση με

$$2B \times C_s$$

- αν όλα τα δείγματα δεν είναι στατιστικώς ανεξάρτητα, τότε η συνολική πληροφορία που μεταδίδεται, θα είναι **μικρότερη** από τον πάνω όρο.
- η χωρητικότητα του καναλιού C που δείχνει την μέγιστη δυνατή πληροφορία που μεταδίδεται ανά δευτερόλεπτο μέσα από κανάλι με εύρος B, είναι ίση με

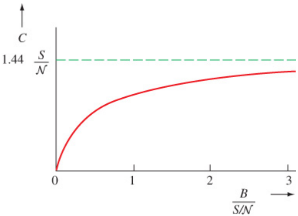
$$C = 2B\left[\frac{1}{2} log\left(1+\frac{S}{N}\right)\right] = B log\left(1+\frac{S}{N}\right) \qquad \text{bits/s}$$

Η χωρητικότητα καναλιού με άπειρο εύρος ζώνης

- παρατηρώντας την προηγούμενη εξίσωση μπορεί να προκύψει το συμπέρασμα ότι η χωρητικότητα τείνει στο άπειρο καθώς το εύρος ζώνης του καναλιού τείνει και αυτό στο άπειρο.
- στην πράξη αυτό δεν ισχύει καθώς με αύξηση του εύρους ζώνης καναλιού, προκύπτει ανάλογη αύξηση της ισχύος του θορύβου.
- ισχύει ότι στο όριο $B \to \infty$, η χωρητικότητα C προσεγγίζει ένα όριο:

$$\lim_{B\to\infty} C = 1.44\frac{S}{N} \qquad \text{bit/s}$$

- η μόνη περίπτωση η χωρητικότητα να γίνει άπειρη, είναι μόνο όταν αυξηθεί η τιμή ισχύος του σήματος ώστε να γίνει άπειρη (έχουμε σήματα πεπερασμένης ισχύος)

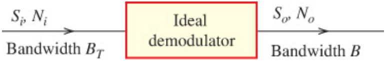


Σχήμα: η χωρητικότητα καναλιού ως συνάρτηση του εύρους ζώνης για ένα κανάλι με AWGN συγκεκριμένης ισχύος

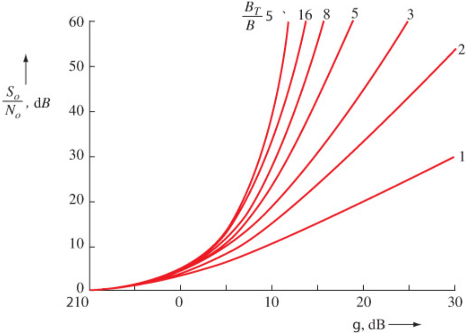
Πρακτικά συστήματα επικοινωνιών υπό το πρίσμα της εξίσωσης Shannon

- είναι χρήσιμο να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τον ιδανικό νόμο για την ανταλλαγή ανάμεσα στον λόγο σήματος προς θόρυβο και στο εύρος ζώνης χρησιμοποιώντας την εξίσωση της χωρητικότητας του καναλιού.
- θεωρούμε ένα μήνυμα εύρους B το οποίο χρησιμοποιείται για διαμόρφωση, με το σήμα που προκύπτει να έχει εύρος ζώνης B_T. Το σήμα αυτό παραλαμβάνεται στην είσοδο ενός αποδιαμορφωτή με τιμές ισχύος σήματος και θορύβου S_i και N_i
- ο αποδιαμορφωτής έχει εύρος ζώνης B και ισχύ σήματος και θορύβου S_0 και N_0.
- οι ιδανικοί ρυθμοί μετάδοσης πληροφορίας των σημάτων στην είσοδο και την έξοδο του αποδιαμορφωτή είναι $B_T log(1 + S_i/N_i)$ και $B log(1 + S_0/N_0)$
- επειδή ο αποδιαμορφωτής δεν δημιουργεί αλλά ούτε και καταστρέφει πληροφορια οι δύο ρυθμοί θα πρέπει να είναι ίδιοι.
- προκύπτει ότι

$$\frac{S_0}{N_0} = \left(1 + \frac{\gamma}{B_T/B}\right)^{B_T/B} - 1 \approx \left(\frac{\gamma}{B_t/T}\right)^{B_T/B}, \qquad \gamma = \frac{S_i}{NB}$$



- ο λόγος SNR στην έξοδο του αποδιαμορφωτή ως συνάρτηση του γ για διάφορες τιμές του λόγου B_T/B φαίνεται στο παρακάτω σχήμα
- ο λόγος SNR στην έξοδο αυξάνει εκθετικά με τον παράγοντα επέκτασης του εύρους ζώνης.
    - για να διατηρήσουμε έναν συγκεκριμένο SNR στην έξοδο, η ισχύς του μεταδιδόμενου σήματος μπορεί να μειωθεί εκθετικά με τον παράγοντα επέκτασης εύρους B_T/B. Για μια μικρή αύξηση του εύρους ζώνης, μπορούμε να μειώσουμε σημαντικά την μεταδιδόμενη ισχύ.
    - για μια μικρή μείωση του εύρους ζώνης χρειάζεται να αυξήσουμε σημαντικά την μεταδιδόμενη ισχύ.



Σχήμα: Η ιδανική συμπεριφορά του SNR συναρτήσει του γ για διάφορους λόγους του B_T/B

Η χωρητικότητα ενός συχνοεπιλεκτικού καναλιού

- για ένα κανάλι AWGN περιορισμένου εύρους ζώνης, η τυχαία έξοδος έχει τη μορφή

$$y = H \cdot x + n$$

με σταθερό κέρδος H σε όλο το εύρος ζώνης του.

- η χωρητικότητα αυτού του καναλιού είναι

$$C = B \cdot log\left(1 + |H|^2 \frac{S}{N}\right) \text{ bit/s}$$

- η χωρητικότητα συχνοεπιλεκτικών καναλιών υπολογίζεται να είναι ίση με

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} log\left[1 + \frac{|H(f)^2|S_x(f)}{S_n(f)}\right] df$$

Αλγόριθμος έγχυσης νερού για το βέλτιστο πρόβλημα ισχύος

- για την περίπτωση του καναλιού με AWGN, η χωρητικότητα είναι ίση με

$$C = Blog_2\left(1 + |H|^2 \frac{S}{N}\right)$$

- για την περίπτωση που $B = 1$, $N = 1$, $|H|^2 = 1$, η χωρητικότητα ισούται με

$$C_1 = log_2(1 + S)$$

- το ζητούμενο είναι να μπορέσουμε να εξετάσουμε αν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερα από ένα κανάλια με μικρότερη ισχύ σε κάθε ένα ώστε να πετύχουμε καλύτερη και πιο αποδοτική μετάδοση.
- έστω ότι χρησιμοποιούμε δύο κανάλια με μισή ισχύ

$$C_2 = log_2\left(1 + \frac{S}{2}\right) + log_2\left(1 + 0.8\frac{S}{2}\right)$$

το ερώτημα είναι αν είναι καλή ιδέα να χωρίσουμε σε δύο κανάλια την επικοινωνία μας αντί για την χρήση ενός μοναδικού καναλιού. Για να το απαντήσουμε αυτό θα πρέπει να δούμε την συνάρτηση log

- για περιπτώσεις ισχύος του σήματος μπορούμε να δούμε ότι συμφέρει να μεταδώσουμε τα μηνύματα μέσω δύο καναλιών, για άλλες (μικρές) τιμές ισχύος, αυτό δεν είναι συμφέρον.
- για την περίπτωση ισχύος $S = 1$, ισχύει ότι $C_1 = 1$, $C_2 = 0.59 + 0.49 = 1.07$
- για την περίπτωση ισχύος $S = 0.2$, ισχύει ότι $C_1 = 0.26$, $C_2 = 0.25$
- για την περίπτωση ισχύος $S = 3$, ισχύει ότι $C_1 = 2$, $C_2 = 2.46$
- έστω ότι χωρίζαμε την μετάδοση σε τρία κανάλια:

$$C_3 = log_2(1 + S/3) + log_2(1 + 0.8 \cdot S/3) + log_2(1 + 0.7 \cdot S/3)$$

  τότε, για την περίπτωση ισχύος $S = 3$, ισχύει ότι $C_1 = 2$, $C_2 = 2.46$ και $C_3 = 2.61$
- για την περίπτωση ισχύος $S = 1$, ισχύει ότι $C_1 = 1$, $C_2 = 1.07$ και $C_3 = 1.06$
- από τα παραπάνω προκύπτει το βέλτιστο πρόβλημα ισχύος το οποίο θέλουμε να λύσουμε με την μέθοδο έγχυσης νερού και να βρούμε:
  - **τον αριθμό των καναλιών** που μπορούμε να μοιράσουμε αποδοτικά την ισχύ του σήματος που θέλουμε να μεταδώσουμε
  - **την κατανομή της ισχύος** σε κάθε διαφορετικό κανάλι

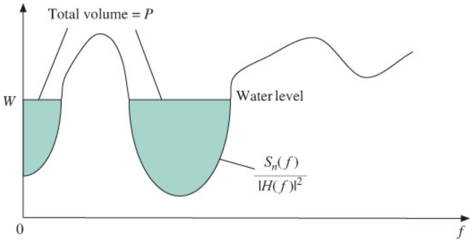
- ο αλγόριθμος έγχυσης νερού υπολογίζει την ισχύ του σήματος που θα μεταδοθεί σε κάθε κανάλι. Αρχικά σχεδιάζουμε την συχνοτική απόκριση $S_n(f)/|H(f)|^2$. Το σχήμα της καμπύλης μοιάζει με πυθμένα ενός δοχείου γεμάτο με νερό.
- η συνολική ισχύς του σήματος είναι παρόμοια με το νερό που βρίσκεται σε έναν κουβά με όγκο P. Αν αδειάσουμε το νερό του κουβά ολόκληρο στο δοχείο ώστε το νερό να έχει την ίδια στάθμη. Οταν αδειάσουμε τον κουβά, το νερό θα ανέλθει σε ύψος W.
- το βάθος του νερού για κάθε συχνότητα είναι η βέλτιστη συνάρτηση PSD $S_x(f)$ που δίνεται από

$$S_i = max\left(W \cdot \Delta f - \frac{N_i}{|H_i|^2}, 0\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, K$$

ώστε να είναι

$$\sum S_i = P$$

- παρατηρούμε ότι όταν η PSD του θορύβου είναι μεγάλη, δηλαδή το $S_n(f)/|H(f)|^2$ είναι μεγάλο για κάποια τιμή της συχνότητας f, τότε ενδεχομένως στα σημεία αυτά δεν θα υπάρχει νερό. Δηλαδή η βέλτιστη PSD για αυτές τις συχνότητες θα είναι μηδέν.
- παρατηρούμε ότι μια υψηλή τιμή του $S_n(f)/|H(f)|^2$ σημαίνει χαμηλή τιμή του λόγου SNR του καναλιού.
- το ατίστροφο ισχύει στην περίπτωση μικρής τιμής $S_n(f)/|H(f)|^2$ ή μεγάλου λόγου SNR.
- **Συμπεράσμα**: η φόρτωση ισχύος τύπου έγχυσης νερού, κατανέμει περισσότερη ισχύ σήματος σε συχνότητες στις οποίες ο λόγος SNR $S_n(f)/|H(f)|^2$ έχει μεγάλη τιμή.



Περαιτέρω μελέτη

- Μπορείτε να πειραματιστείτε με τις διαφορετικές τεχνικές που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο αυτό, δοκιμάζοντας τα προγράμματα σε MATLAB που βρίσκονται στην ενότητα 13.9

SIPPRE
SIGNAL AND IMAGE PROCESSING
PATTERN RECOGNITION GROUP

Signal & Image Processing, Pattern Recognition Group (SIPPRE)
www.sippre-group.com