

Ανάλυση επίδοσης των ψηφιακών συστημάτων επικοινωνιών

Αθανάσιος Κούτρας

Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών,
Παν. Πελοποννήσου

30 Νοεμβρίου 2021

Περιγραμμά διάλεξης

- 1 Βέλτιστος γραμμικός ανιχνευτής για δυαδική πολική σηματοδοσία
- 2 Γενική δυαδική σηματοδοσία
- 3 Σύμφωνοι δέκτες για ψηφιακές διαμορφώσεις φερόντων σημάτων
- 4 Σηματοδοσία πολλαπλών πλατών
- 5 Μη σύμφωνη ανίχνευση
- 6 Περαιτέρω μελέτη
- 7 Επιπλέον βιβλιογραφία

Υλικό μελέτης

B.P. Lathi, Zhi Ding, "Σύγχρονες Αναλογικές και Ψηφιακές
Επικοινωνίες"

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

10

**Ανάλυση απόδοσης των
ψηφιακών συστημάτων
επικοινωνιών**

Περιγραφή διάλεξης

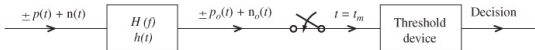
- Στην διάλεξη αυτή θα παρουσιάσουμε δύο σημαντικές πτυχές της ανάλυσης της επίδοσης των ψηφιακών συστημάτων επικοινωνιών:
- στο πρώτο μέρος θα παρουσιάσουμε την ανάλυση σφάλματος μιας σειράς από δέκτες δυαδικής ανίχνευσης και θα παρουσιάσουμε την ανάλυση της επίδοσης BER.
- στο δεύτερο μέρος θα παρουσιάσουμε τις διαδικασίες κατασκευής δεκτών για βέλτιστη ανίχνευση που σχετίζονται με τα γενικά ψηφιακά συστήματα επικοινωνιών ώστε να ελαχιστοποιηθεί η τιμή του BER

Βέλτιστος γραμμικός ανιχνευτής για δυαδική πολική σηματοδοσία

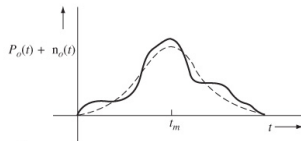
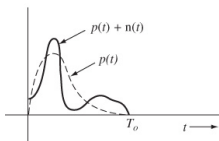
- Θεωρούμε το σύστημα δυαδικής πολικής σηματοδοσίας του παρακάτω σχήματος.
- τα bits της πηγής **1, 0** αναπαριστώνονται με παλμούς $\pm p(t)$
- σε περίπτωση που η διέλευση γίνεται μέσω καναλιού που δεν εισάγει παραμόρφωση, το σήμα που λαμβάνεται είναι

$$y(t) = \pm p(t) + n(t) \quad 0 < t < T_0$$

όπου $n(t)$ είναι θόρυβος Gauss.



(a)



(b)

Σχήμα: Τυπική δυαδική πολική σηματοδοσία και γραμμικός δέκτης

Ανίχνευση δυαδικού κατωφλίου

- μετά την λήψη του σήματος $y(t)$ ο δέκτης θα πρέπει να αποφασίσει αν έχει σταλεί ένα 1 ή ένα 0.
- Με δεδομένα τα χαρακτηριστικά $H(f)$ ή $h(t)$, το σήμα που καταγράφεται στην έξοδο είναι

$$y(t) = \pm p(t) * h(t) + n(t) * h(t) = \pm p_o(t) + n_o(t)$$

- η μεταβλητή απόφασης αυτού του δέκτη είναι το δείγμα εξόδου του φίλτρου τη χρονική στιγμή $t = t_m$

$$r(t_m) = \pm p_o(t_m) + n_o(t_m)$$

- επειδή ο θόρυβος είναι τύπου Gauss, και η συνέλιξη του με το $h(t)$ θα είναι τύπου Gauss.
- αν ορίσουμε

$$A_p = p_o(t_m) \quad \sigma_n^2 = E\{n_o(t_m)^2\}$$

τότε το πρόβλημα της δυαδικής απόφασης είναι ακριβώς το ίδιο με το πρόβλημα της ανίχνευσης κατωφλίου με πιθανότητα σφάλματος (bit)

$$P_e = Q(\rho), \quad \rho = \frac{A_p}{\sigma_n}$$

- συνεπώς για να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα, θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την παράμετρο ρ αφού η $Q(\rho)$ αυξάνει μονοτονικά με την ρ



Η συνάρτηση Q

- για μια τυχαία μεταβλητή τύπου Gauss, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι της μορφής

$$p_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

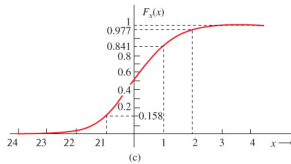
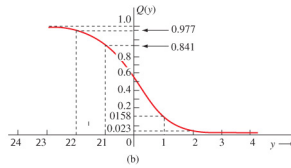
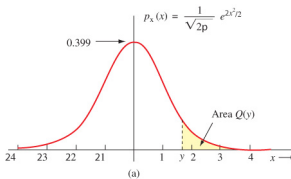
και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_{\mathbf{x}}(x)$ έχει τη μορφή

$$F_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx$$

- επειδή το παραπάνω δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά, χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους και συγκεκριμένα την συνάρτηση Q

$$Q(y) = \frac{1}{2\pi} \int_y^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

- η περιοχή κάτω από την $p_{\mathbf{x}}(x)$ από το 0 ως το ∞ είναι η $Q(y)$. Η τιμή της συνάρτησης αυτής δίνεται από αριθμητικούς πίνακες (βλ. βιβλίο)



Σχήμα: Συνάρτηση κατανομής τύπου Gauss

○○○○○●○○○○○

○○○○○○○○○○

○○○○○○○○○

Q(x)

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0000	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
.1000	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
.2000	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
.3000	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
.4000	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
.5000	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
.6000	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
.7000	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
.8000	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
.9000	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0000	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1000	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2000	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.9853E-01
1.3000	.9608E-01	.9510E-01	.9423E-01	.9342E-01	.9276E-01	.9212E-01	.9151E-01	.9091E-01	.8534E-01	.8226E-01
1.4000	.8076E-01	.7927E-01	.7790E-01	.7636E-01	.7493E-01	.7353E-01	.7215E-01	.7078E-01	.6944E-01	.6811E-01
1.5000	.6681E-01	.6525E-01	.6420E-01	.6301E-01	.6178E-01	.6057E-01	.5938E-01	.5821E-01	.5705E-01	.5592E-01
1.6000	.5480E-01	.5370E-01	.5262E-01	.5155E-01	.5050E-01	.4947E-01	.4846E-01	.4746E-01	.4648E-01	.4551E-01
1.7000	.4457E-01	.4363E-01	.4272E-01	.4182E-01	.4093E-01	.4006E-01	.3920E-01	.3836E-01	.3754E-01	.3673E-01
1.8000	.3593E-01	.3515E-01	.3438E-01	.3362E-01	.3288E-01	.3216E-01	.3144E-01	.3074E-01	.3005E-01	.2938E-01
1.9000	.2872E-01	.2807E-01	.2743E-01	.2680E-01	.2619E-01	.2559E-01	.2500E-01	.2442E-01	.2385E-01	.2330E-01
2.0000	.2275E-01	.2222E-01	.2169E-01	.2118E-01	.2068E-01	.2018E-01	.1970E-01	.1923E-01	.1876E-01	.1831E-01
2.1000	.1786E-01	.1743E-01	.1700E-01	.1659E-01	.1618E-01	.1578E-01	.1539E-01	.1500E-01	.1463E-01	.1426E-01
2.2000	.1390E-01	.1355E-01	.1321E-01	.1287E-01	.1255E-01	.1222E-01	.1191E-01	.1160E-01	.1130E-01	.1101E-01
2.3000	.1072E-01	.1044E-01	.1017E-01	.9903E-02	.9642E-02	.9387E-02	.9137E-02	.8894E-02	.8656E-02	.8424E-02
2.4000	.8190E-02	.7976E-02	.7760E-02	.7549E-02	.7344E-02	.7143E-02	.6947E-02	.6756E-02	.6569E-02	.6387E-02
2.5000	.6210E-02	.6037E-02	.5868E-02	.5703E-02	.5543E-02	.5386E-02	.5234E-02	.5085E-02	.4940E-02	.4799E-02
2.6000	.4661E-02	.4527E-02	.4396E-02	.4269E-02	.4145E-02	.4025E-02	.3907E-02	.3793E-02	.3681E-02	.3573E-02
2.7000	.3467E-02	.3364E-02	.3264E-02	.3167E-02	.3072E-02	.2980E-02	.2890E-02	.2803E-02	.2718E-02	.2635E-02
2.8000	.2553E-02	.2477E-02	.2401E-02	.2327E-02	.2256E-02	.2186E-02	.2118E-02	.2052E-02	.1988E-02	.1926E-02
2.9000	.1866E-02	.1807E-02	.1750E-02	.1695E-02	.1641E-02	.1589E-02	.1538E-02	.1489E-02	.1441E-02	.1395E-02
3.0000	.1330E-02	.1306E-02	.1284E-02	.1263E-02	.1243E-02	.1224E-02	.1207E-02	.1190E-02	.1173E-02	.1157E-02
3.1000	.9676E-03	.9354E-03	.9043E-03	.8740E-03	.8447E-03	.8164E-03	.7888E-03	.7622E-03	.7364E-03	.7114E-03
3.2000	.6871E-03	.6637E-03	.6410E-03	.6190E-03	.5976E-03	.5770E-03	.5571E-03	.5377E-03	.5190E-03	.5009E-03
3.3000	.4804E-03	.4665E-03	.4501E-03	.4342E-03	.4189E-03	.4041E-03	.3897E-03	.3758E-03	.3624E-03	.3495E-03
3.4000	.3369E-03	.3248E-03	.3131E-03	.3018E-03	.2909E-03	.2802E-03	.2701E-03	.2602E-03	.2507E-03	.2415E-03
3.5000	.2262E-03	.2241E-03	.2218E-03	.2078E-03	.2008E-03	.1926E-03	.1854E-03	.1785E-03	.1718E-03	.1653E-03
3.6000	.1591E-03	.1531E-03	.1473E-03	.1417E-03	.1363E-03	.1311E-03	.1261E-03	.1213E-03	.1166E-03	.1121E-03
3.7000	.1078E-03	.1036E-03	.9961E-04	.9574E-04	.9201E-04	.8842E-04	.8496E-04	.8162E-04	.7841E-04	.7532E-04
3.8000	.7233E-04	.6948E-04	.6675E-04	.6407E-04	.6152E-04	.5906E-04	.5669E-04	.5442E-04	.5223E-04	.5012E-04
3.9000	.4810E-04	.4615E-04	.4427E-04	.4247E-04	.4074E-04	.3908E-04	.3747E-04	.3594E-04	.3446E-04	.3304E-04
4.0000	.3167E-04	.3036E-04	.2910E-04	.2789E-04	.2673E-04	.2561E-04	.2454E-04	.2351E-04	.2252E-04	.2157E-04
4.1000	.2066E-04	.1978E-04	.1894E-04	.1814E-04	.1737E-04	.1662E-04	.1591E-04	.1523E-04	.1458E-04	.1395E-04
4.2000	.1325E-04	.1277E-04	.1222E-04	.1168E-04	.1118E-04	.1069E-04	.1022E-04	.9774E-05	.9345E-05	.8944E-05
4.3000	.8540E-05	.8163E-05	.7801E-05	.7455E-05	.7124E-05	.6807E-05	.6503E-05	.6212E-05	.5934E-05	.5668E-05
4.4000	.5413E-05	.5169E-05	.4933E-05	.4712E-05	.4499E-05	.4294E-05	.4098E-05	.3911E-05	.3732E-05	.3561E-05
4.5000	.3388E-05	.3241E-05	.3092E-05	.2949E-05	.2813E-05	.2682E-05	.2558E-05	.2439E-05	.2323E-05	.2216E-05
4.6000	.2112E-05	.2033E-05	.1953E-05	.1828E-05	.1742E-05	.1660E-05	.1581E-05	.1506E-05	.1434E-05	.1365E-05
4.7000	.1301E-05	.1239E-05	.1179E-05	.1123E-05	.1069E-05	.1017E-05	.9680E-06	.9211E-06	.8756E-06	.8399E-06
4.8000	.7933E-06	.7547E-06	.7178E-06	.6827E-06	.6492E-06	.6173E-06	.5869E-06	.5580E-06	.5304E-06	.5042E-06
4.9000	.4792E-06	.4556E-06	.4327E-06	.4111E-06	.3906E-06	.3711E-06	.3528E-06	.3448E-06	.3379E-06	.3309E-06
5.0000	.2867E-06	.2722E-06	.2584E-06	.2452E-06	.2328E-06	.2209E-06	.2096E-06	.1989E-06	.1887E-06	.1790E-06

Φίλτρο βέλτιστου δέκτη - προσαρμοσμένο φίλτρο

- για να ελαχιστοποιήσουμε την τιμή BER του P_e θα πρέπει να προσδιορίσουμε το βέλτιστο φίλτρο του δέκτη $H(f)$ και την αντίστοιχη στιγμή δειγματοληψίας t_m που θα ελαχιστοποιούν την τιμή $Q(\rho)$.
- ψάχνουμε ένα φίλτρο το οποίο θα μεγιστοποιεί το

$$\rho^2 = \frac{p_o^2(t_m)}{\sigma_n^2}$$

ο οποίος είναι και ο λόγος σήματος προς θόρυβο τη χρονική στιγμή $t = t_m$

- εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς στην συχνότητα καθώς και την ανισότητα Cauchy-Schwartz προκύπτει τελικά ότι ο λόγος σήματος προς θόρυβο μεγιστοποιείται αν

$$H(f) = k \frac{P(-f)e^{-j2\pi ft_m}}{S_n(f)}$$

όπου k είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

- το φίλτρο αυτό ονομάζεται **προσαρμοσμένο φίλτρο**

- το βέλτιστο φίλτρο εξαρτάται από πολλούς παράγοντες:
 - τη συνάρτηση PSD του θορύβου $S_n(f)$
 - τη χρονική στιγμή δειγματοληψίας t_m
 - το σχήμα του παλμού $P(f)$
- δεν εξαρτάται όμως από το κέρδος k καθώς αυτό εφαρμόζεται και στο σήμα και στον θόρυβο χωρίς να επιρρεάζει τον λόγο σήματος προς θόρυβο.
- αν ο θόρυβος είναι λευκός, τότε $S_n(f) = N/2$ και

$$\rho^2 < \rho_{max}^2 = \frac{2}{N} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = \frac{2E_p}{N}$$

όπου E_p είναι η ενέργεια του σήματος $p(t)$

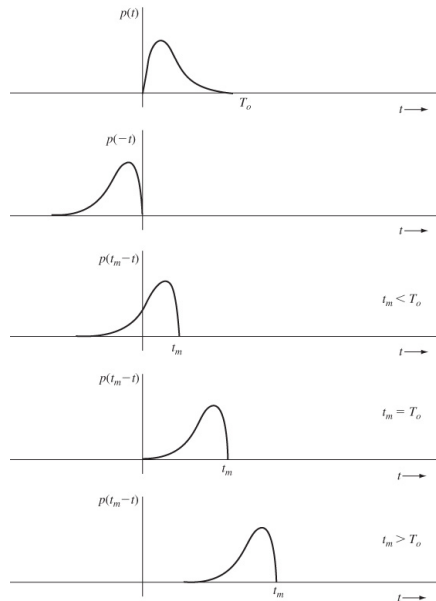
- το προσαρμοσμένο φίλτρο γίνεται

$$H(f) = k' P(-f) e^{-j2\pi f t_m}, \quad k' = 2k/N$$

με κρουστική απόκριση

$$h(t) = k' p(t_m - t)$$

- στην παραπάνω έκφραση το $p(t_m - t)$ είναι ο παλμός $p(-t)$ καθυστερημένος κατά t_m



Σχήμα: Η βέλτιστη επιλογή για την στιγμή δειγματοληψίας

- στο προηγούμενο σχήμα παρουσιάζονται τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές για την λήψη απόφασης.
- στην πρώτη περίπτωση $t_m < T_0$ οδηγούμαστε σε μια μη αιτιατή κρουστική απόκριση που δεν είναι υλοποιήσιμη.
- οι άλλες δύο περιπτώσεις οδηγούν σε υλοποιήσιμες λύσεις, αλλά η τελευταία καθυστερεί ασκόπως την λήψη απόφασης t_m
- η περίπτωση $t_m = T_0$ δίνει την ελάχιστη υστέρηση για την λήψη απόφασης όταν χρησιμοποιείται ένα υλοποιήσιμο φίλτρο.
- επειδή και ο παλμός $p(t)$ και η κρουστική $h(t)$ έχουν διάρκεια T_0 , η συνέλιξη τους θα έχει διάρκεια ίση με $2T_0$ με την κορυφή του να αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή T_0 οπότε και λαμβάνεται απόφαση για το δείγμα.
- το κέρδος k' δεν επιρροάζει τον λόγο SNR ρ και μπορούμε να τον θέσουμε ίσο με $k' = 1$. Έτσι το προσαρμοστικό φίλτρο γίνεται

$$h(t) = P(T_0 - t) \quad H(f) = P(-f)e^{-j2\pi f T_0}$$

για το οποίο ο λόγος σήματος προς θόρυβο γίνεται μέγιστος τη στιγμή λήψης απόφασης.

- το προηγούμενο προσαρμοστικό φίλτρο για την περίπτωση του λευκού προσθετικού θορύβου μεγιστοποιεί στην πλευρά του δέκτη τον λόγο σήματος προς θόρυβο ρ_{max} και αυτό οδηγεί στην ελάχιστη τιμή BER

$$P_e = Q(\rho_{max}) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N}}\right)$$

- το παραπάνω δείχνει ότι το σχήμα του παλμού δεν παίζει ρόλο στην επίδοση του συστήματος όταν χρησιμοποιούμε δέκτη προσαρμοσμένου φίλτρου, αρκεί οι παλμοί να έχουν την ίδια ενέργεια E_p

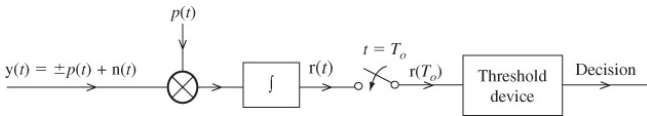
$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \int_0^{T_0} |p(t)|^2 dt$$

Ανιχνευτής συσχέτισης

- υπάρχει και διαφορετική διάταξη υλοποίησης του προσαρμοστικού φίλτρου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα
- για αυτή τη διάταξη η μεταβλητή απόφασης είναι ίση με

$$r(T_o) = \int_0^{T_o} y(x)p(x)dx$$

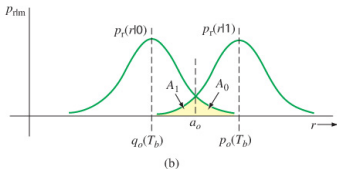
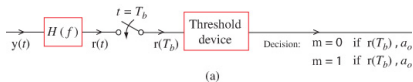
- το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι ίσο με την ετροσυσχέτιση του λαμβανόμενου παλμού με τον παλμό $p(t)$. Συνεπώς ο δέκτης μετράει την ομοιότητα του λαμβανόμενου σήματος με τον παλμό $p(t)$.
- ανάλογα με το πρόσημο της συσχέτισης αποφασίζει αν έχει σταλεί ο παλμός $p(t)$ ή ο παλμός $-p(t)$.



Σχήμα: Ανιχνευτής συσχέτισης

Γενική δυαδική σηματοδοσία

- στην προηγούμενη περίπτωση παρουσιάσαμε την περίπτωση του πολικού σχήματος στο οποίο μεταδίδεται μόνο ένας παλμός με διαφορετικό πρόσημο για το ψηφίο **1** ή **0**.
- στην γενική περίπτωση μετάδοσης, χρησιμοποιούνται δύο διαφορετικοί παλμοί $p(t)$ και $q(t)$ για την μετάδοση του **1** και του **0**.
- στην δομή του βέλτιστου γραμμικού δέκτη του σχήματος, το εισερχόμενο σήμα $y(t)$ περνάει μέσα από το φίλτρο $H(f)$ και η έξοδος υφίσταται δειγματοληψία κάθε T_b δευτερόλεπτα.
- η απόφαση για το σύμβολο **0** ή **1** που ανιχνεύεται εξαρτάται από το εάν η τιμή του $r(T_b)$ είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από ένα κατώφλι a_0



Σχήμα: Βέλτιστη δυαδική ανίχνευση κατωφλίου

- ισχύει ότι οι αποκρίσεις του φίλτρου $H(f)$ στους παλμούς $p_0(t)$ και $q_0(t)$ είναι

$$p_0(T_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)H(f)e^{-j2\pi fT_b}df$$

$$q_0(T_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(f)H(f)e^{-j2\pi fT_b}df$$

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)|H(f)|^2df$$

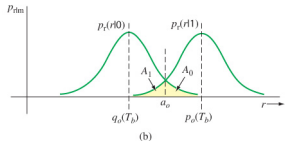
- η έξοδος του δειγματολήπτη $r(t)$ θα είναι ίση με το σύμβολο που λαμβάνεται συν τον θόρυβο n . Συνεπώς η μεταβλητή r θα είναι μια τυχαία μεταβλητή τύπου Gauss με διακύμανση σ^2 και μέση τιμή $q_0(T_b)$ ή $p_0(T_b)$ ανάλογα με το σύμβολο που έχει σταλεί.
- έτσι οι συναρτήσεις PDF υπό συνθήκη της δειγματοληπτημένης εξόδου θα είναι:

$$p_{r|m}(r|\mathbf{0}) = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[r - q_0(T_b)]^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p_{r|m}(r|\mathbf{1}) = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[r - p_0(T_b)]^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

Το βέλτιστο κατώφλι

- αν θεωρήσουμε το a_0 ως το βέλτιστο κατώφλι ανίχνευσης, ο κανόνας απόφασης θα οδηγεί σε ανίχνευση του **0** αν $r < a_0$ και του **1** αν $r > a_0$
- η πιθανότητα σφάλματος υπό συνθήκη $P(\epsilon|m = \mathbf{0})$ είναι η πιθανότητα να πάρουμε λάθος απόφαση όταν το $m = \mathbf{0}$. Αυτή είναι ίση με το εμβαδό της περιοχής A_0 του σχήματος (από το a_0 μέχρι το $+\infty$)
- με όμοια συλλογιστική, η πιθανότητα σφάλματος υπό συνθήκη $P(\epsilon|m = \mathbf{1})$ είναι η πιθανότητα να πάρουμε λάθος απόφαση όταν το $m = \mathbf{1}$. Αυτή είναι ίση με το εμβαδό της περιοχής A_1 του σχήματος (από το $-\infty$ μέχρι το a_0)



Σχήμα: Βέλτιστη δυαδική ανίχνευση κατωφλίου

- συνεπώς αν θεωρήσουμε ισοπίθανη την εμφάνιση οποιουδήποτε από τα δύο σύμβολα **0** ή **1**

$$P_e = \sum_i P(\epsilon|m_i)P(m_i) = \frac{1}{2}(A_0+A_1) = \frac{1}{2} \left[Q\left(\frac{a_0 - q_0(T_0)}{\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{p_0(T_0) - a_0}{\sigma_n}\right) \right]$$

- το παραπάνω σφάλμα ελαχιστοποιείται αν διαλέξουμε a_0 στην τομή των δύο PDF και είναι ίσο με

$$a_0 = \frac{p_0(T_b) + q_0(T_b)}{2}$$

για το οποίο προκύπτει $P_e = Q\left(\frac{\beta}{2}\right)$

$$\beta = \frac{p_0(T_b) - q_0(T_b)}{\sigma_n} \quad \beta_{max}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P(f) - Q(f)|^2}{S_n(f)} df$$

- το βέλτιστο φίλτρο $H(f)$ δίνεται από την σχέση

$$H(f) = k \frac{[P(-f) - Q(-f)]e^{-j2\pi f T_b}}{S_n(f)}$$

η περίπτωση του λευκού θορύβου τύπου Gauss

- γνωρίζουμε ότι για τον λευκό θόρυβο $S_n(f) = N/2$ και το βέλτιστο φίλτρο δίνεται από τη σχέση

$$H(f) = [P(-f) - Q(-f)]e^{-j2\pi f T_b}$$

$$h(t) = p(T_b - t) - q(T_b - t)$$

- το παραπάνω είναι ένα φίλτρο το οποίο είναι προσαρμοσμένο στην διαφορά των δύο παλμών $p(t) - q(t)$.
- η αντίστοιχη τιμή του β είναι

$$\beta_{max}^2 = \frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{N/2}$$

- ο ρυθμός σφαλμάτων bit (bit error rate) P_b (αντί για P_e που χρησιμοποιούσαμε μέχρι τώρα) είναι ίσος με

$$P_b = Q\left(\frac{\beta_{max}}{2}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{2N}}\right)$$

- το βέλτιστο κατώφλι για την λήψη απόφασης

$$a_0 = \frac{1}{2}(E_p - E_q)$$

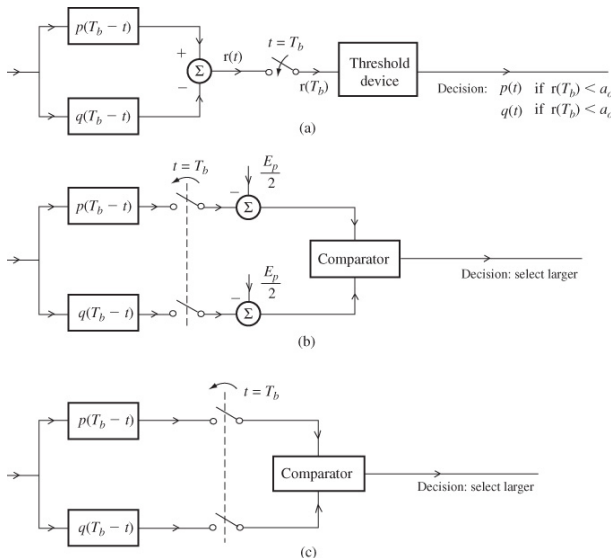
Ισοδύναμοι βέλτιστοι δυαδικοί δέκτες

- για τον βέλτιστο δέκτη που δείξαμε πριν, το φίλτρο με την απόκριση συχνότητας

$$H(f) = [P(-f) - Q(-f)]e^{-j2\pi fT_b} = P(-f)e^{-j2\pi fT_b} - Q(-f)e^{-j2\pi fT_b}$$

μπορεί να υλοποιηθεί ως παράλληλος συνδυασμός δύο φίλτρων προσαρμοσμένων στους παλμούς $p(t)$ και $q(t)$ (βλ. επόμενο σχήμα (α)).

- μια διαφορετική υλοποίηση μπορεί να προκύψει αν αφαιρέσουμε αντίστοιχα τα $E_p/2$ και $E_q/2$ από τις εξόδους των δύο προσαρμοσμένων φίλτρων. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την μετατόπιση του κατωφλίου από το a_0 στο 0 (βλ. επόμενο σχήμα (β))
- αυτό δεν είναι απαραίτητο να γίνει αν $E_p = E_q$ και ο δέκτης απλοποιείται όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα (βλ. επόμενο σχήμα (γ))



Σχήμα: Υλοποίηση βέλτιστου δυαδικού ανιχνευτή καταωφλίου

Ανάλυση επίδοσης γενικών δυαδικών συστημάτων - Πολική Σηματοδοσία

- στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε 2 διαφορετικούς παλμούς, αλλά μόνο έναν $p(t)$ και τον αντίθετο του $q(t) = -p(t)$
- με αντικαταστάσεις στις πρηγούμενες σχέσεις και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $E_p = E_q, E_{pq} = -E_p$ προκύπτουν:

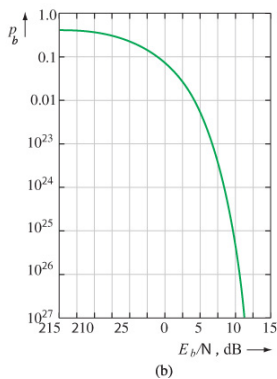
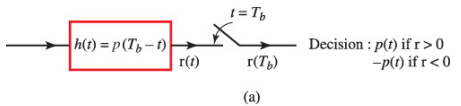
$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N}}\right)$$

$$h(t) = 2p(T_b - t) = p(T_b - t)$$

- τιμή κατωφλίου: $a_0 = 0$
- η πιθανότητα σφάλματος εκφράζεται συναρτήσει της βασικής παραμέτρου E_b που είναι η ενέργεια ανά bit. Στην πολική περίπτωση $E_b = E_p$ και έτσι

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N}}\right)$$

- η τιμή $\frac{2E_b}{N}$ είναι η κανονικοποιημένη ενέργεια ανά bit
- η ισχύς του σήματος είναι $S_i = E_b R_b$



Σχήμα: Βέλτιστος ανιχνευτής καταωφλίου και (β) η πιθανότητα σφάλματος του ανιχνευτή για την περίπτωση της πολικής σηματοδosis

Σύμφωνοι δέκτες για ψηφιακές διαμορφώσεις φερόντων σημάτων - BPSK

- στην περίπτωση της BPSK, τα δυαδικά σύμβολα μεταδίδονται ως

$$\mathbf{1}: +\sqrt{2}p'(t)\cos\omega_c t$$

$$\mathbf{0}: -\sqrt{2}p'(t)\cos\omega_c t$$

με τη συνάρτηση $p'(t)$ να συμβολίζει το σχήμα του παλμού βασικής ζώνης.

- έχει την ίδια μορφή σηματοδότησης με την πολική σηματοδότηση βασικής ζώνης.
- τιμή κατωφλίου: $a_0 = 0$ και

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N}}\right)$$

- η ενέργεια του παλμού είναι

$$E_p = \int_0^{T_b} p(t)^2 dt = 2 \int_0^{T_b} [p'(t)]^2 \cos^2\omega_c t dt = \int_0^{T_b} [p'(t)]^2 dt = E'_p$$

- το αποτέλεσμα αυτό απαιτεί μια συχνότητα φέροντος με ικανοποιητικά μεγάλη τιμή ώστε να είναι $f_c T_b \gg 1$

Σύμφωνοι δέκτες για ψηφιακές διαμορφώσεις φερόντων σημάτων - ASK

- στην περίπτωση της ASK, τα δυαδικά σύμβολα μεταδίδονται ως

$$1: +\sqrt{2}p'(t)\cos\omega_c t$$

$$0: 0$$

με τη συνάρτηση $p'(t)$ να συμβολίζει το σχήμα του παλμού βασικής ζώνης.

- έχει την ίδια μορφή σηματοδοσίας με την on-off σηματοδοσία βασικής ζώνης.
- τιμή κατωφλίου: $a_0 = E_p/2$ και

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N}}\right)$$

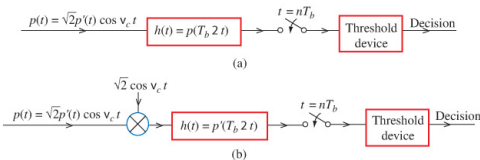
όπου

$$E_b = \frac{E_p}{2} = \frac{E'_p}{2}$$

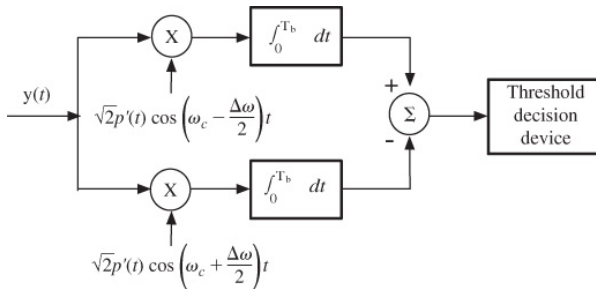
- για την ίδια επίδοση, η ενέργεια παλμού στην ASK θα πρέπει να είναι διπλάσια σε σχέση με την PSK.
- η ASK απαιτεί 3dB περισσότερη ισχύ σε σχέση με την PSK.
- η ASK στην σύγχρονη ανίχνευση δεν είναι πρακτική. Είναι χρήσιμη όμως στα μη σύμφωνα συστήματα (οπτικές επικοινωνίες).
- οι παλμοί βασικής ζώνης που χρησιμοποιούνται στα σήματα φέροντος θα πρέπει να μορφοποιηθούν ώστε να ελαχιστοποιήσουν την ISI
- το εύρος των σημάτων PSK, ASK είναι το διπλάσιο σε σχέση με αυτό του σήματος βασικής ζώνης εξαιτίας της διαμόρφωσης

Ζωνοπερατό προσαρμοσμένο φίλτρο ως σύμφωνος δέκτης

- και για τις δύο μεθόδους ASK, PSK μπορεί να υλοποιηθεί ο βέλτιστος δέκτης προσαρμοσμένου φίλτρου (περίπτωση (α)).
- στο παρακάτω σχήμα ο παλμός στον δέκτη ανιχνεύεται από φίλτρο προσαρμοσμένο σε έναν παλμό $p(t)$ που ακολουθείται από έναν δειγματολήπτη πριν τον ανιχνευτή κατωφλίου.
- ο δέκτης αυτός μπορεί να τροποποιηθεί σε αυτόν του (β) σχήματος: πρώτα γίνεται αποδιαμόρφωση με σύμφωνο τρόπο (πολ/σμός με το $\sqrt{2}\cos\omega_c t$)
- αυτό που προκύπτει είναι παλμός βασικής ζώνης και θόρυβος βασικής ζώνης το οποίο εφαρμόζεται σε φίλτρο που είναι προσαρμοσμένο στον παλμό βασικής ζώνης $p'(t)$

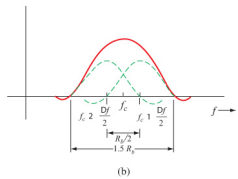
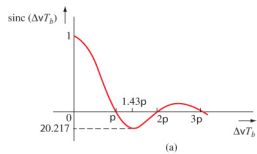


Σχήμα: Σύμφωνη ανίχνευση ψηφιακά διαμορφωμένων σημάτων



Σχήμα: Βέλτιστη σύμφωνη φώραση δυαδικών σημάτων FSK

- επιλογή μεγάλων τιμών Δf σημαίνουν μεγαλύτερο διαχωρισμό ανάμεσα στις συχνότητες σηματοδοσίας και κατά συνέπεια μεγαλύτερο εύρος ζώνης μετάδοσης
- για να ελαχιστοποιηθεί το εύρος, επιλέγουμε όσο γίνεται πιο μικρή τιμή του Δf
- η ελάχιστη τιμή Δf που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ορθογώνια σηματοδοσία είναι ίση με $1/2T_b$
- η FSK που χρησιμοποιεί αυτή την τιμή για Δf ονομάζεται MSK (Minimum Shift Keying)



Σχήμα: (α) το ελάχιστο της συνάρτησης sinc και (β) το φάσμα MSK

Ελάχιστη μεταλλαγή μετατόπισης

- στην MSK θα πρέπει όχι μόνο να μεριμνήσουμε για την επιλογή των συχνοτήτων ώστε να απέχουν $1/2T_b$ αλλά θα πρέπει να διατηρείται και η συνέχεια της φάσης καθώς μεταβαίνουμε ανάμεσα στις $f \pm \Delta f$ στην θέση του πομπού.
- γιατί; επειδή απότομες αλλαγές στη φάση μπορεί να οδηγήσουν σε αύξηση του εύρους ζώνης.
- τα σήματα που διατηρούν σταθερή τη φάση είναι γνωστά ως CPFSK και η MSK είναι μια υπο-περίπτωση αυτών.
- για να διατηρήσουμε την φάση σταθερή σε κάθε μετάπτωση bit, η φάση καθίσταται εξαρτώμενη από την ακολουθία των προηγούμενων δεδομένων.

- η MSK είναι μια ορθογώνια μέθοδος με πιθανότητα σφάλματος

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N}}\right)$$

- αν και αυτό φαίνεται υποδεέστερο από το αντίστοιχο της FSK, ισχύει μόνο στην περίπτωση της σύμφωνης ανίχνευσης σε διάστημα παρατήρησης ίσο με T_b
- επειδή όμως το MSK σήμα έχει πληροφορία των προηγούμενων τιμών του στην φάση του, ανιχνεύοντας το σε μεγαλύτερο διάστημα όπως $2T_b$, έχει ως αποτέλεσμα η επίδοση του να είναι ίδια με αυτή της βέλτιστης PSK

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N}}\right)$$

- η MSK έχει εύρος ζώνης ίσο με $1.5R_b$, ενώ διαθέτει δυνατότητες αυτο-συγχρονισμού.
- το φάσμα της εξασθενεί γρήγορα ως $1/f^4$ σε αντίθεση με το PSK που εξασθενεί μόνο ως $1/f^2$

Σηματοδосία πολλαπλών πλατών

- στην περίπτωση των πολλαπλών πλατών, τα M σύμβολα μεταδίδονται χρησιμοποιώντας M παλμούς και συγκεκριμένα

$$\pm p(t), \pm 3p(t), \pm 5p(t), \dots, \pm(M-1)p(t)$$

- έτσι για να μπορέσουμε να μεταδώσουμε R_M M -αδικά ψηφία ανά δευτερόλεπτο θα πρέπει να μεταδώσουμε R_M παλμούς ανά δευτερόλεπτο της πιο πάνω μορφής ($kp(t)$).
- οι παλμοί αυτοί μεταδίδονται κάθε T_M δευτερόλεπτα, συνεπώς ισχύει ότι $T_M = 1/R_M$
- θεωρούμε ότι οι παλμοί είναι το ίδιο πιθανοί με μέση ενέργεια του παλμού E_{pM} να υπολογίζεται από

$$E_{pM} = \frac{2}{M} [E_p + 9E_p + 25E_p + \dots + (M-1)^2 E_p] = \frac{M^2 - 1}{3} E_p \approx \frac{M^2}{3} E_p \quad M \gg 1$$

- ένα M -αδικό σύμβολο μεταφέρει πληροφορία με μέγεθος $\log_2 M$, συνεπώς η ενέργεια E_b ανά bit θα είναι

$$E_b = \frac{E_{pM}}{\log_2 M} = \frac{M^2 - 1}{3 \log_2 M} E_p$$

- στην περίπτωση που εξετάζουμε, το εύρος ζώνης μετάδοσης είναι ανεξάρτητο από το πλάτος του παλμού, συνεπώς το M -αδικό εύρος ζώνης είναι το ίδιο με αυτό της δυαδικής περίπτωσης για δεδομένο αριθμό παλμών, αν και μεταφέρει περισσότερη πληροφορία.
- για ένα συγκεκριμένο ρυθμό πληροφορίας, το εύρος ζώνης PAM είναι μικρότερο από αυτό της δυαδικής κατά παράγοντα $\log_2 M$
- ο βέλτιστος δέκτης για την περίπτωση της M -αδικής σηματοδότησης πολλαπλών πλατών είναι ο ίδιος με αυτόν για την πολική δυαδική περίπτωση.
- όταν ο παλμός εισόδου είναι $kp(t)$, η έξοδος την στιγμή της δειγματοληψίας θα είναι

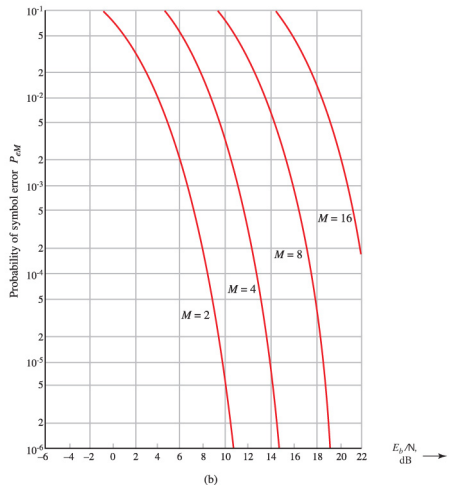
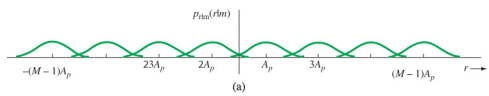
$$r(T_M) = kA_p + n_0(T_M)$$

- η συσκευή δειγματοληψίας διαθέτει M δυνατές εξόδους που θέλουμε να ανιχνεύσουμε της μορφής

$$\pm kA_p + n_0(T_M) \quad k = 1, 3, 5, \dots, M - 1$$

- οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας υπό συνθήκη $p(r|m_i)$ είναι τύπου Gauss με μέση τιμή $\pm kA_p$ και διακύμανση σ^2 .
- η πιθανότητα σφάλματος κατά την ανίχνευση ενός συμβόλου P_{eM} δίνεται από την

$$P_{eM} = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right)$$



Σχήμα: οι συναρτήσεις pdf υπό συνθήκη στην μέθοδο PAM (β) πιθανότητα σφάλματος στην μέθοδο PAM

- στην περίπτωση ενός προσαρμοσμένου φίλτρου στον δέκτη, έχουμε $(A_p/\sigma_n)^2 = 2E_p/N$ και

$$P_{eM} = 2 \left(\frac{M-1}{M} \right) Q \left(\sqrt{\frac{2E_p}{N}} \right) =$$

$$2 \left(\frac{M-1}{M} \right) Q \left[\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1}} \left(\frac{E_b}{N} \right) \right]$$

- για να μπορέσουμε να μετρήσουμε με τίμιο τρόπο τα λάθη στην ανίχνευση, δεν θα πρέπει να μετράμε την P_{eM} δηλαδή την πιθανότητα σφάλματος ενός M -αδικού συμβόλου καθώς για να συμβεί αυτό, δεν είναι απαραίτητο να είναι όλα τα bits του συμβόλου λάθος ανιχνευμένα.
- η δίκαιη σύγκριση θα ήταν να συγκρίνουμε τις πιθανότητες ως προς τα σφάλματα που πραγματοποιούνται σε επιμέρους bits P_b
- η πιθανότητα αυτή είναι ίση με

$$P_b \approx P_{eM} / \log_2 M$$

M-αδική ανάλυση QAM

- στην περίπτωση της M-αδικής QAM, το μεταδιδόμενο σήμα αναπαρίσταιται από την εξίσωση:

$$s_i(t) = a_i \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos \omega_c t + b_i \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin \omega_c t$$

$$a_i = \pm \frac{d}{2}, \pm \frac{3d}{2}, \dots, \pm \frac{(\sqrt{M} - 1)d}{2}$$

$$b_i = \pm \frac{d}{2}, \pm \frac{3d}{2}, \dots, \pm \frac{(\sqrt{M} - 1)d}{2}$$

- ο χώρος σήματος QAM είναι διδιάστατος με συναρτήσεις βάσης τις $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos \omega_c t$ και $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin \omega_c t$
- εδώ θα παρουσιάσουμε την ανάλυση της 16-αδικής QAM με όλα τα σήματα να έχουν την ίδια πιθανότητα σε ένα κανάλι AWGN.

- η πιθανότητα σφάλματος κατά την ανίχνευση ενός συμβόλου για την περίπτωση της 16 QAM είναι ίση με

$$P_{eM} \approx 3(1 - p) = 3Q \left(\frac{d}{\sqrt{d/\sqrt{2N}}} \right)$$

όπου d είναι η απόσταση των συμβόλων

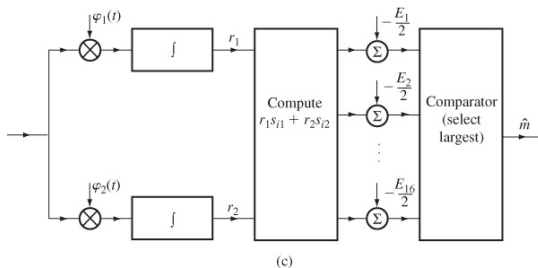
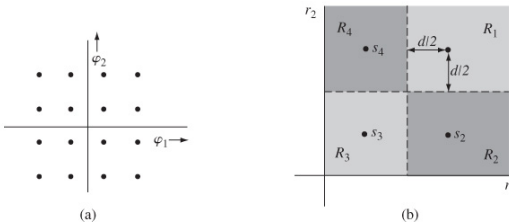
- η μέση ενέργεια του συνόλου των σημάτων ισούται με $\bar{E} = \frac{5}{2}d^2$ και η

ενέργεια ανά bit $E_b = \frac{\bar{E}}{4}$

- η κανονικοποιημένη ενέργεια ανά bit $\frac{E_b}{N} = \frac{\bar{E}}{4N} = \frac{5d^2}{8N}$ και κατά συνέπεια για μεγάλες τιμές του λόγου E_b/N θα έχουμε

$$P_{eM} = 3Q \left(\frac{d}{\sqrt{2N}} \right) = 3Q \left(\sqrt{\frac{4}{5} \frac{E_b}{N}} \right)$$

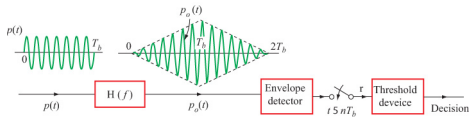
- συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με αυτό της δυαδικής PSK, παρατηρούμε ότι η QAM 16 σημείων απαιτεί σχεδόν 2.5 φορές περισσότερη ισχύ σε σχέση με την δυαδική PSK.
- ο ρυθμός μετάδοσης όμως αυξάνεται κατά έναν παράγοντα με τιμή ίση με $\log_2 M = 4$



Σχήμα: 16-QAM - Δέκτης

Μη σύμφωνη ανίχνευση

- όταν η φάση θ στον λαμβανόμενο παλμό είναι άγνωστη, τότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάποια από τις τεχνικές σύμφωνης ανίχνευσης που είδαμε νωρίτερα.
- για τον λόγο αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τεχνικές μη σύμφωνης ανίχνευσης όπως είναι η φώραση της περιβάλλουσας.
- για φάση η οποία παίρνει τυχαίες τιμές στο διάστημα $[0 - 2\pi]$ ο καλύτερος ανιχνευτής είναι ένα φίλτρο προσαρμοσμένο στον παλμό, το οποίο ακολουθείται από φωρατή περιβάλλουσας, δειγματοληπτή (για την δειγματοληψία την στιγμή $t = T_b$) και έναν συγκριτή για την λήψη της απόφασης.



Σχήμα: Μη σύμφωνη ανίχνευση ψηφιακών διαμορφωμένων σημάτων στην ASK

Διαμόρφωση μεταλλαγής μετατόπισης πλάτους

- το προηγούμενο σχήμα δείχνει έναν μη σύμφωνο ανιχνευτή για τη μέθοδο ASK. Το φίλτρο $H(f)$ είναι το φίλτρο που έχει προσαρμοστεί στον παλμό χωρίς να λαμβάνει υπ' όψιν του την φάση
- επειδή το πλάτος δεν είναι απαραίτητο να είναι μέγιστο την στιγμή της δειγματοληψίας, χρησιμοποιούμε την περιβάλλουσα η οποία θα βρίσκεται κοντά στο μέγιστο την στιγμή αυτή.
- η περιβάλλουσα υφίσταται δειγματοληψία την στιγμή T_b για την λήψη απόφασης.
- όταν μεταδίδεται το σύμβολο **1**, η έξοδος του φωρατή περιβάλλουσας τη στιγμή $t = T_b$ είναι μια περιβάλλουσα ενός ημιτονοειδούς σήματος πλάτους A_p σε θόρυβο τύπου Gauss με διακύμανση σ^2 . Η περιβάλλουσα ακολουθεί την κατανομή Rice.
- για μικρό θόρυβο η περιβάλλουσα ακολουθεί την κατανομή Gauss (A_p, σ_n^2)

$$p_r(r|m = \mathbf{1}) \approx \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-(r-A_p)^2/2\sigma_n^2}$$

- όταν μεταδίδεται το σύμβολο **0**, η έξοδος του φωρατή περιβάλλουσας τη στιγμή $t = T_b$ είναι μια περιβάλλουσα ενός θορύβου Gauss με σ_n^2 . Η περιβάλλουσα ακολουθεί την κατανομή Rayleigh.

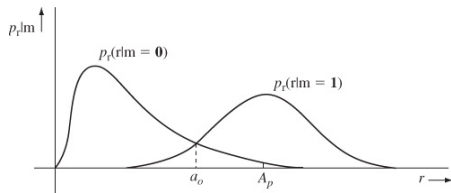
$$p_r(r|m = \mathbf{0}) = \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-r^2/2\sigma_n^2}$$

- το βέλτιστο κατώφλι είναι το σημείο εκείνο στο οποίο οι δύο πυκνότητες τέμνονται μεταξύ τους το οποίο προκύπτει μετά από υπολογισμούς

$$a_0 = \frac{A_p}{2} \sqrt{1 + \frac{8\sigma_n^2}{A_p^2}} = E_b \sqrt{1 + \frac{2}{E_b/N}}$$

- το βέλτιστο κατώφλι δεν είναι σταθερό αλλά εξαρτάται από την τιμή του λόγου E_b/N (κάτι το οποίο αποτελεί μειονέκτημα για κανάλι διαλείψεων).
- για την περίπτωση του ισχυρού σήματος ($E_b/N \gg 1$) η πιθανότητα λανθασμένης ανίχνευσης είναι

$$P_b = \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{1}{2}E_b/N} + Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N}} \right) \right] \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}E_b/N}$$



Σχήμα: συναρτήσεις pdf υπό συνθήκη για τη μη σύμφωνη ανίχνευση σημάτων ASK

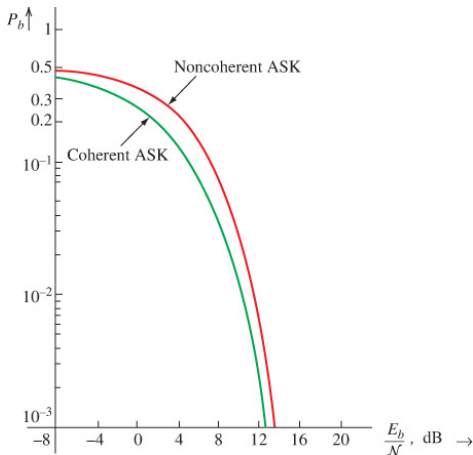
- αν ο δέκτης είναι βέλτιστος, τότε για λόγους $E_b/N \gg 1$, η τιμή της πιθανότητας $P(\epsilon|m = 1)$ είναι πολύ μικρότερη από την $P(\epsilon|m = 0)$
- για παράδειγμα για τιμή $E_b/N = 10$, η πιθανότητα ανίχνευσης

$$P(\epsilon|m = 0) \approx 8.7P(\epsilon|m = 1)$$

- ο τύπος του σφάλματος που κυριαρχεί είναι να θεωρήσουμε εσφαλμένα το σύμβολο **0** ως το **1**
- για λόγους σύγκρισης, θυμίζουμε ότι για την περίπτωση ενός σύμφωνου ανιχνευτή, η πιθανότητα εσφαλμένης ανίχνευσης είναι

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi E_b N}} e^{-\frac{1}{2}E_b/N}$$

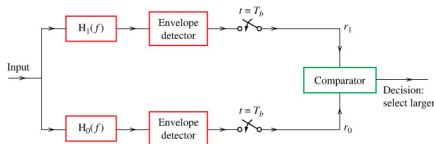
- για μεγάλη τιμή του λόγου E_b/N , οι αποδόσεις του σύμφωνου ανιχνευτή και του φωρατή περιβάλλουσας είναι παρόμοιες.



Σχήμα: Πιθανότητα σφάλματος για τη μη σύμφωνη ανίχνευση ASK

Διαμόρφωση μεταλλαγής μετατόπισης συχνότητας

- στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται ένας μη σύμφωνος δέκτης για την FSK.
- τα δύο φίλτρα $H_0(f)$ και $H_1(f)$ είναι προσαρμοσμένα στους παλμούς που αντιστοιχούν στο 0 και το 1.
- οι έξοδοι των φωρατών περιβάλλουσας τη στιγμή $t = T_b$ είναι r_0 και r_1 αντίστοιχα.
- οι συνιστώσες θορύβου των εξόδων των φίλτρων είναι τυχαίες μεταβλητές τύπου Gauss με $\sigma_{n_0} = \sigma_{n_1} = \sigma_n$



Σχήμα: μη σύμφωνη ανίχνευση δυαδικής FSK

- το σφάλμα ανίχνευσης ενός μεταδιδόμενου συμβόλου **1** είναι ίσο με

$$P(\epsilon|m = \mathbf{1}) = \frac{1}{2}e^{-A_p^2/4\sigma_n^2}$$

- επειδή για το προσαρμοσμένο φίλτρο ισχύει ότι

$$\rho_{max}^2 = \frac{A_p^2}{\sigma_n^2} = \frac{2E_p}{N}$$

και για την FSK ότι $E_p = E_b$ η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί ως

$$P(\epsilon|m = \mathbf{1}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}E_b/N}$$

- ομοίως ισχύει και για την λανθασμένη ανίχνευση του συμβόλου **0**

$$P(\epsilon|m = \mathbf{1}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}E_b/N}$$

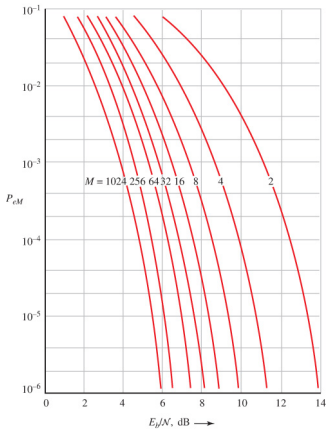
συνεπώς

$$P_b = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}E_b/N}$$

- η συμπεριφορά του FSK είναι παρόμοια με την προηγούμενη του ASK.
- στις περιπτώσεις $E_b/N \gg 1$ οι αποδόσεις της σύμφωνης και μη σύμφωνης FSK είναι ίδιες.
- πρακτικά η FSK προτιμάται έναντι της ASK επειδή έχει σταθερό βέλτιστο κατώφλι σε αντίθεση με την ASK που το κατώφλι της εξαρτάται από τον λόγο E_b/N
- η FSK δεν επιρρεάζεται από διαλείψεις καναλιού και αυτό αποτελεί και το κύριο πλεονέκτημα χρήσης της έναντι της μη σύμφωνης ASK.
- επιπλέον οι πιθανότητες λανθασμένης ανίχνευσης συμβόλου είναι ίσες.
- το τίμημα που πληρώνουμε για αυτό το πλεονέκτημα είναι μεγαλύτερες απαιτήσεις σε εύρος ζώνης.

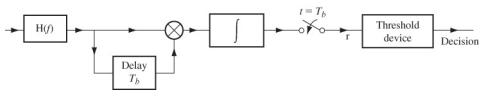
Η μη σύμφωνη MFSK

- στην περίπτωση της MFSK, η συμφωνία φάσης των M συχνοτήτων είναι δύσκολο να διατηρηθεί και σπάνια χρησιμοποιείται η σύμφωνη MFSK.
- η πιο συνηθισμένη είναι η μη σύμφωνη αποδιαμόρφωση. Το σχήμα είναι παρόμοιο (επέκταση) της περίπτωσης της ανίχνευσης δύο συμβόλων, αλλά με M συστοιχίες που αντιστοιχούν στις M συχνότητες.



Η διαφορική σύμφωνη PSK

- ένα σήμα PSK είναι αδύνατο να το αποδιαμορφώσουμε χρησιμοποιώντας φωρατή περιβάλλουσας και μη σύμφωνο τρόπο. Μπορούμε όμως να το αποδιαμορφώσουμε χωρίς σύμφωνο φέρον σήμα, χρησιμοποιώντας την διαφορική PSK.
- ο δέκτης του σχήματος μοιάζει με δέκτη συσχέτισης ο οποίος είναι ισοδύναμος με ανιχνευτή προσαρμοσμένου φίλτρου.
- στον δέκτη πολλαπλασιάζουμε τον παλμό $p(t)$ με έναν άλλο που δημιουργείται τοπικά και είναι ο προηγούμενος.
- επειδή υπάρχει θόρυβος, μειώνεται η επίδοση του ανιχνευτή αυτού σε σχέση με την σύμφωνη μέθοδο PSK.

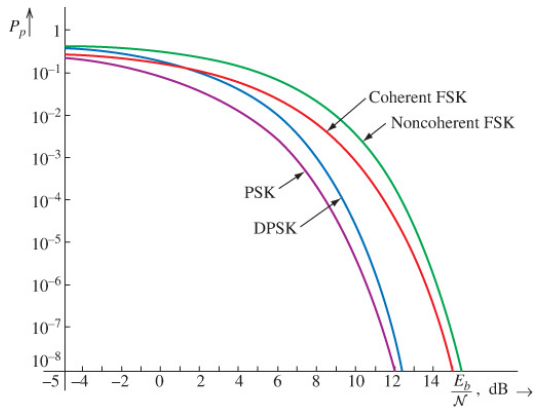


Σχήμα: Ανίχνευση διαφορικής PSK

- όταν η έξοδος r είναι θετική ο παλμός είναι ταυτόσημος με τον προηγούμενο, όταν είναι αρνητική, τότε ο τρέχων παλμός είναι ο αρνητικός του προηγούμενου. Συνεπώς αν γνωρίζουμε το πρώτο ψηφίο αναφοράς, μπορούμε να ανιχνεύσουμε τα επόμενα.
- η μέθοδος αυτή αποτελεί ένα **ορθογώνιο σχήμα σηματοδοσίας**
- ένα δυαδικό **1** μεταδίδεται από μια ακολουθία δύο παλμών (p, p) ή $(-p, -p)$ μέσα σε χρονικό διάστημα $2T_b$ (δεν παρατηρείται μετάπτωση).
- ένα δυαδικό **0** μεταδίδεται από μια ακολουθία δύο παλμών $(p, -p)$ ή $(-p, p)$ μέσα σε χρονικό διάστημα $2T_b$ (παρατηρείται μετάπτωση).
- η κάθε μια από τις ακολουθίες που χρησιμοποιούνται για την μετάδοση ενός **0** είναι ορθογώνια με αυτές που χρησιμοποιούνται για την μετάδοση του **1**.
- παρατηρείστε ότι δεν δημιουργείται τοπικό φέρον σήμα, συνεπώς πρόκειται για μη σύμφωνη ανίχνευση με ενέργεια παλμού ίση με $2E_p$.
- η πραγματική ενέργεια ανά ψηφίο όμως είναι E_p και είναι ίδια με αυτή της FSK.
- συνεπώς η επίδοση της DPSK υπερτερεί κατά 3dB της μη σύμφωνης FSK και έχει

$$P_b = \frac{1}{2}e^{-E_b/N}$$

- αυτή η πιθανότητα σφάλματος υπερτερεί της πιθανότητας της μη-σύμφωνης FSK κατά 3dB και είναι περίπου παρόμοια με την σύμφωνη PSK για $E_b/N \gg 1$



Σχήμα: Πιθανότητα σφάλματος στην PSK, DPSK, και τη σύμφωνη και μη σύμφωνη FSK

Περαιτέρω μελέτη

- Μπορείτε να πειραματιστείτε με τις διαφορετικές τεχνικές που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο αυτό, δοκιμάζοντας τα προγράμματα σε MATLAB που βρίσκονται στην ενότητα 10.12

Επιπλέον Βιβλιογραφία

Εκτός από το σύγγραμμα των Lathi και Ding "**Σύγχρονες Αναλογικές και Ψηφιακές Επικοινωνίες**", οι φοιτητές μπορούν να ανατρέξουν και στα παρακάτω βιβλία για πρόσθετο υλικό μελέτης:

- Proakis, Salehi, "**Συστήματα Τηλεπικοινωνιών**", Δεύτερη Έκδοση, Εκδόσεις Fountas (Κεφάλαιο 8)
- S. Haykin, M. Moher, "**Συστήματα Επικοινωνίας**", 5η έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου (Κεφάλαιο 9)



Signal & Image Processing, Pattern Recognition Group (SIPPRE)
www.sippre-group.com