

Βελτιστοποίηση Εικόνας στο Πεδίο της Συχνότητας

Διάλεξη 6 - Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας

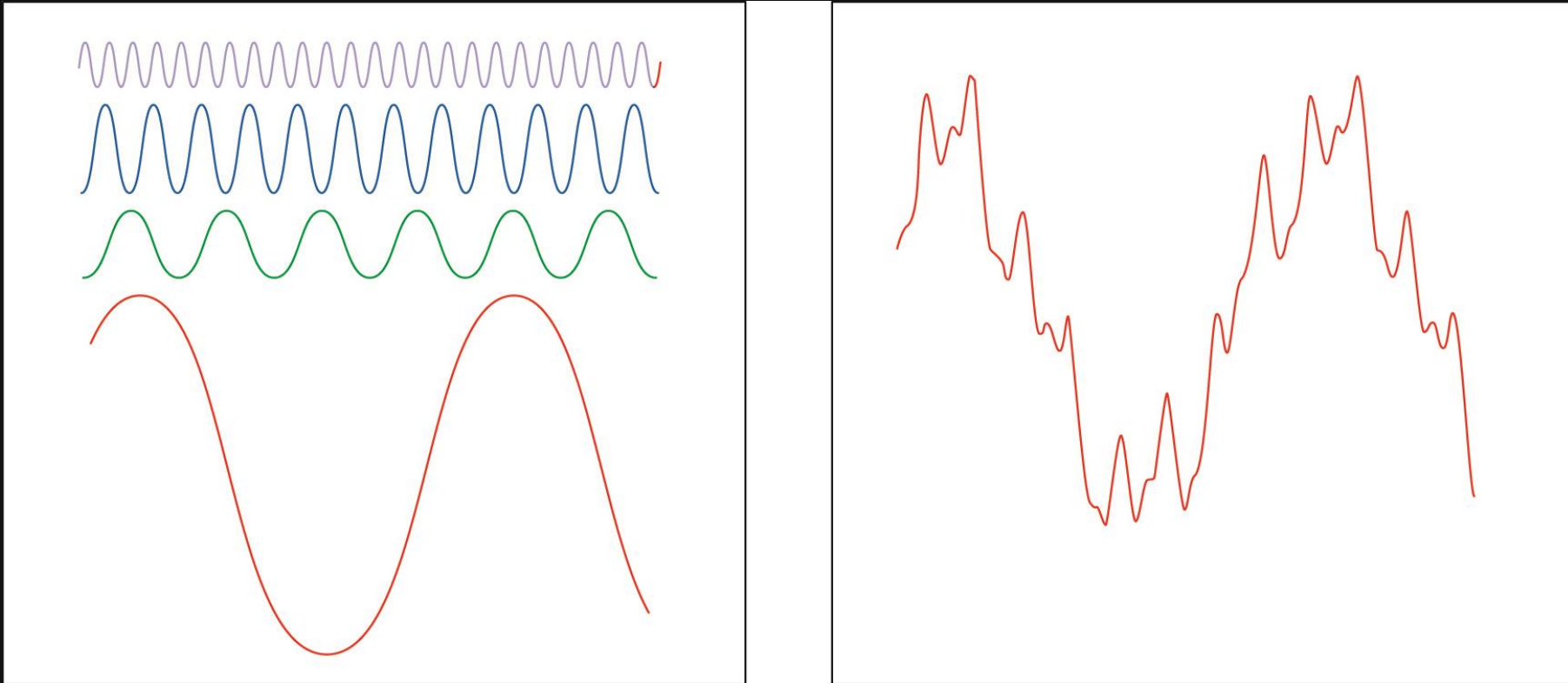
TEL750 – ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΚΟΝΑΣ

Δρ. Α. Κούτρας, Αναπληρωτής Καθηγητής
koutras@uop.gr

Περιεχόμενα

- Δειγματοληψία και μετασχηματισμός Fourier
- Διακριτός μετασχηματισμός Fourier μιας μεταβλητής
- Επέκταση σε συναρτήσεις δύο μεταβλητών
- Ιδιότητες διδιάστατου μετασχηματισμού Fourier
- Η βασική θεωρία του φιλτραρίσματος στο πεδίο της συχνότητας
- Εξομάλυνση με κατωδιαβατά φίλτρα στο πεδίο της συχνότητας
- Όξυνση εικόνας χρησιμοποιώντας ανωδιαβατά φίλτρα
- Επιλεκτικό φιλτράρισμα

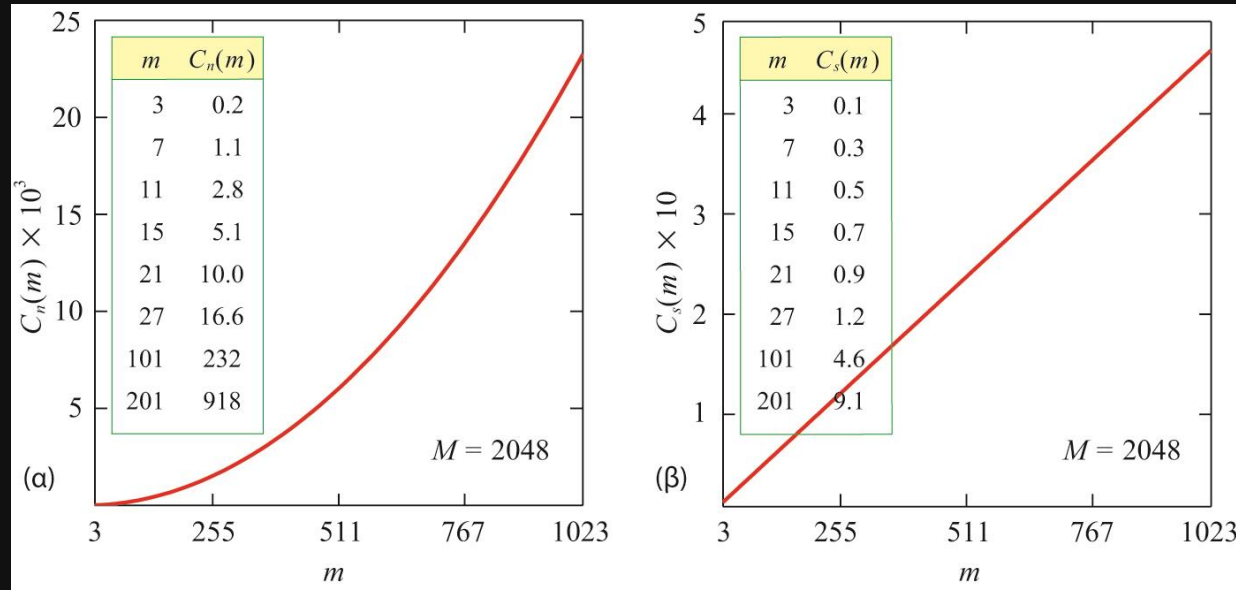
Μετασχηματισμός Fourier



Ανάλυση σήματος σε 4 συνιστώσες

Αρχικό σήμα

Σύγκριση φιλτραρίσματος στον χώρο - συχνότητα



Υπολογιστικό πλεονέκτημα
φιλτραρίσματος στο πεδίο
συχνότητας με FFT έναντι μη
διαχωρίσιμο πυρήνα στον χώρο

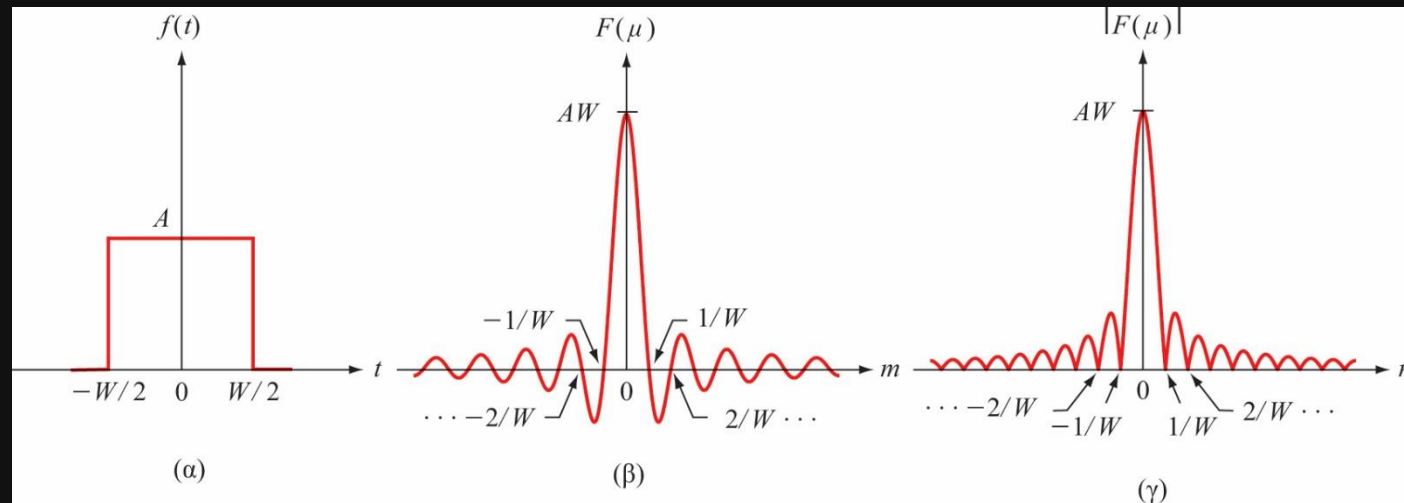
$$C_n(m) = \frac{M^2 m^2}{2M^2 \log_2 M^2} = \frac{m^2}{4 \log_2 M}$$

Υπολογιστικό πλεονέκτημα
διαχωρίσιμων πυρήνων στο πεδίο του
χώρου έναντι μη-διαχωρίσιμων
πυρήνων

$$C_s(m) = \frac{M^2 m^2}{2M^2 \log_2 M^2} = \frac{m}{2 \log_2 M}$$

Αν για μια εικόνα 2048X2048 ο FFT ήθελε 1 λεπτό, το φιλτράρισμα με μη-διαχωρίσιμο φίλτρο θα απαιτούσε 17 ώρες!

Μετασχηματισμός Fourier συνάρτησης μίας μεταβλητής – Ορθογώνιος παλμός



$$|F(\mu)| = AT \left[\frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)} \right]$$

- Οι θέσεις των μηδενικών της $F(\mu)$ και του μέτρου της είναι αντιστρόφως ανάλογες με το εύρος W του ορθογωνίου παλμού
- Το ύψος των λοβών ελαττώνεται ως συνάρτηση της απόστασης από την αρχή
- Η συνάρτηση εκτείνεται στο άπειρο τόσο για θετικές, όσο και για αρνητικές τιμές του μ

Συνέλιξη συνάρτησης μίας διάστασης

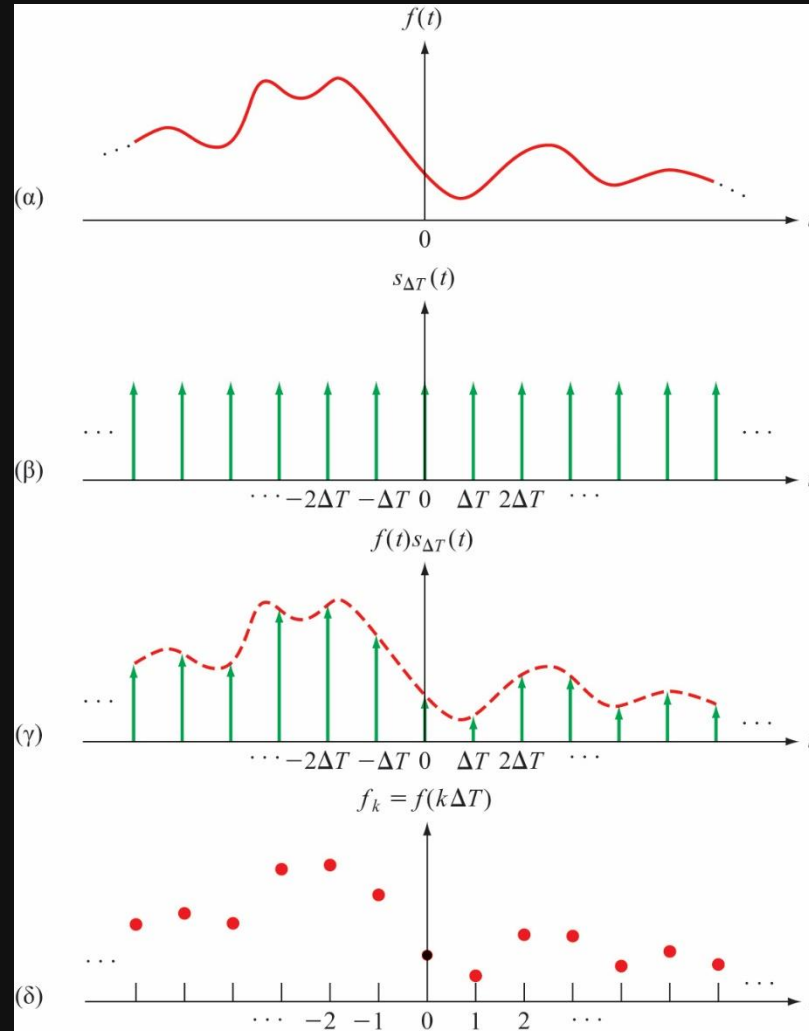
- Για την πραγματοποίηση της συνέλιξης ξέρουμε ότι πρέπει να προχωρήσουμε σε αναστροφή 180° της μίας συνάρτησης και μετά ολίσθηση της μέσω της άλλης συνάρτησης
- Σε κάθε τιμή μετατόπισης υπολογίζουμε το άθροισμα γινομένων.
- Στην περίπτωση συνεχών συναρτήσεων, το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα, και για τον μετασχηματισμό Fourier ισχύει:

$$f(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$f(t) \star h(t) \leftrightarrow H(u) \cdot F(u)$$

$$f(t) \cdot h(t) \leftrightarrow H(\mu) \star F(\mu)$$

Δειγματοληψία σημάτων



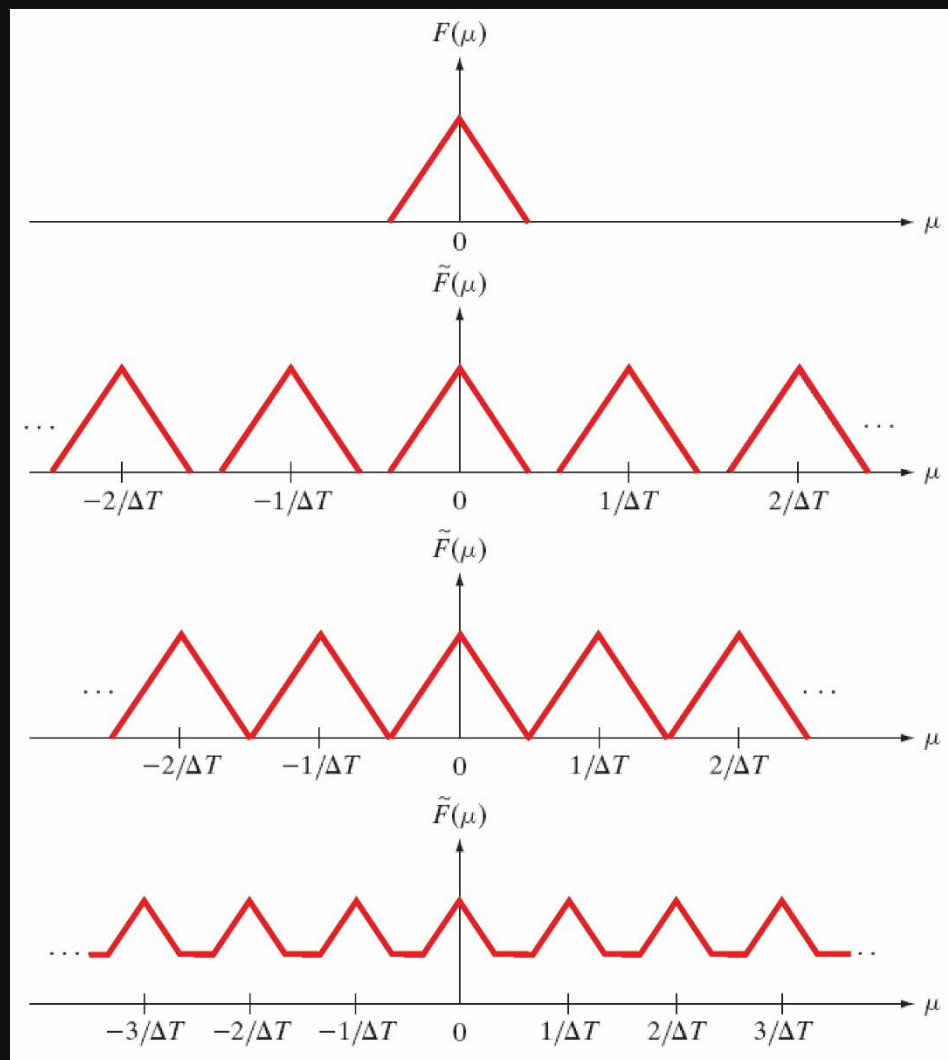
Μετασχηματισμός Fourier δειγματοληφθεισών συναρτήσεων

Μετασχηματισμός Fourier συνάρτησης
περιορισμένου φάσματος

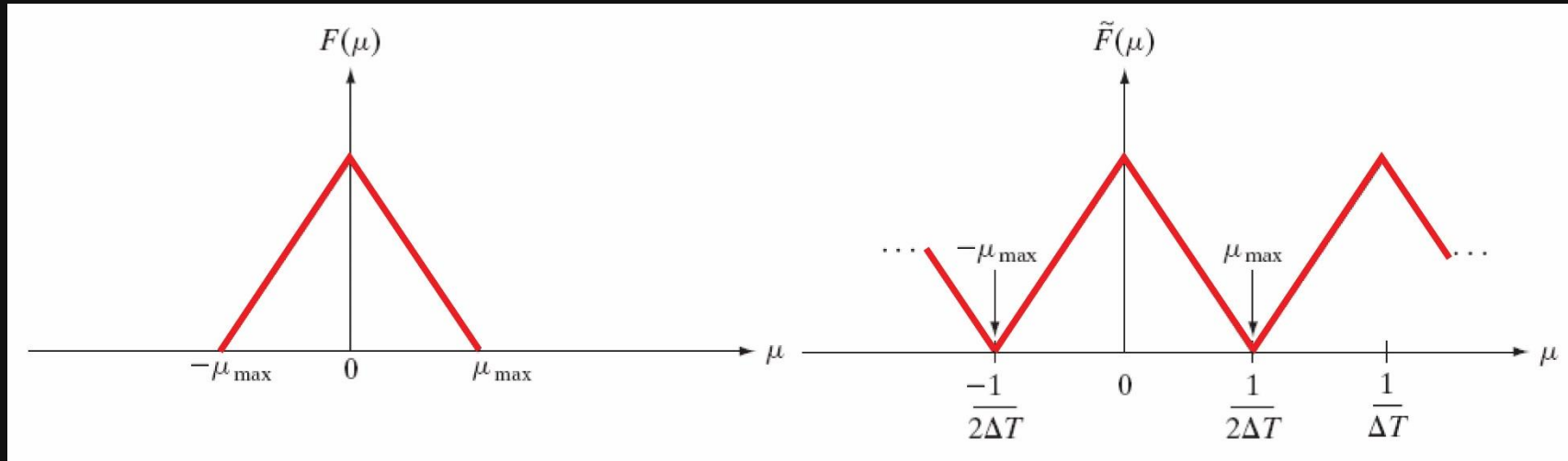
Μετασχηματισμός Fourier σήματος
μετά από δειγματοληψία σε συνθήκες
υπερδειγματοληψίας

Μετασχηματισμός Fourier σήματος
μετά από δειγματοληψία σε συνθήκες
κρίσιμης δειγματοληψίας

Μετασχηματισμός Fourier σήματος
μετά από δειγματοληψία σε συνθήκες
υποδειγματοληψίας



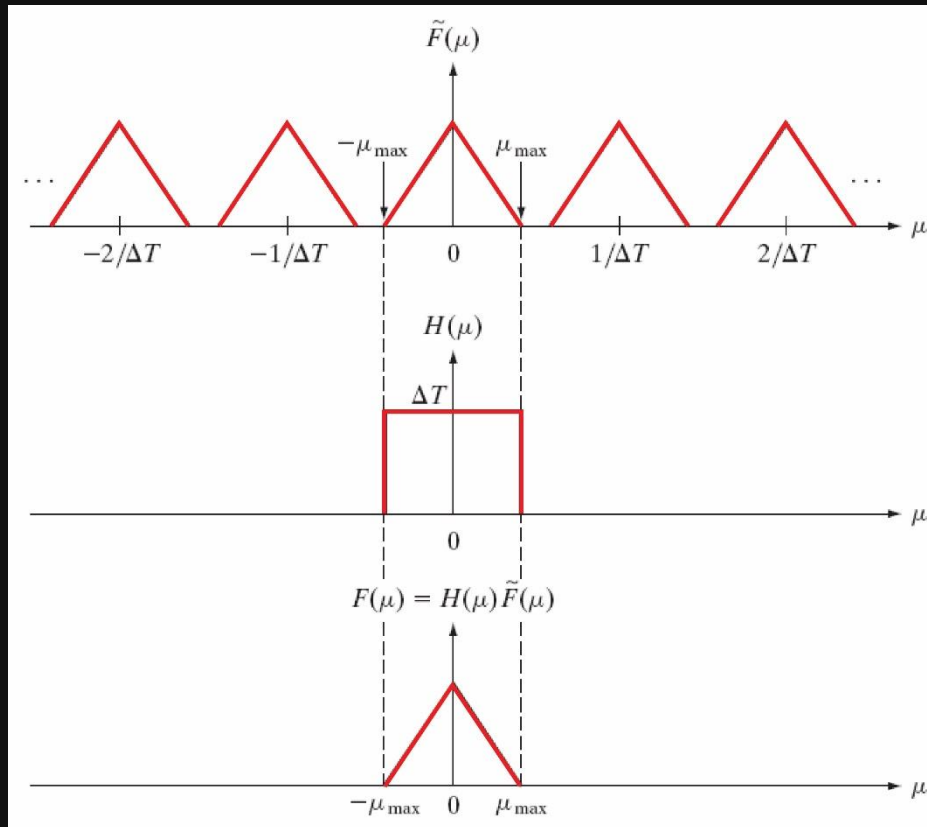
Μετασχηματισμός Fourier δειγματοληφθεισών συναρτήσεων



Ο μετασχηματισμός Fourier συνάρτησης
περιορισμένου φάσματος

Ο μετασχηματισμός Fourier που προκύπτει από την
κρίσιμη δειγματοληψία της συνάρτησης

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

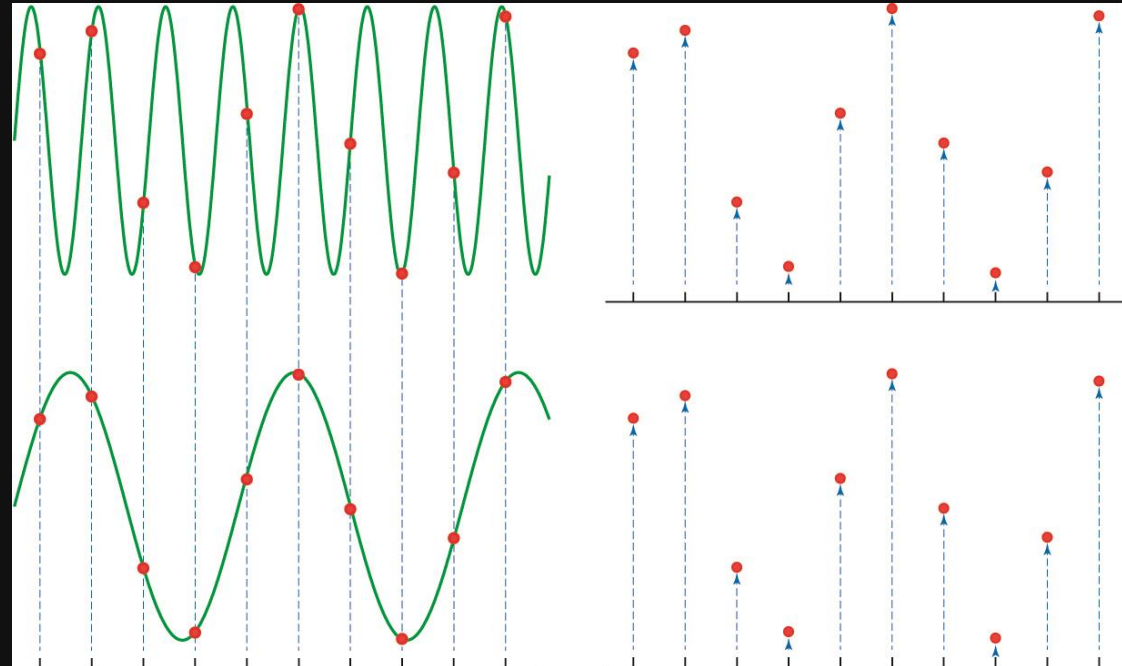


Μετασχηματισμός Fourier συνάρτησης
περιορισμένου φάσματος

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός
κατωδιαβατού φίλτρου

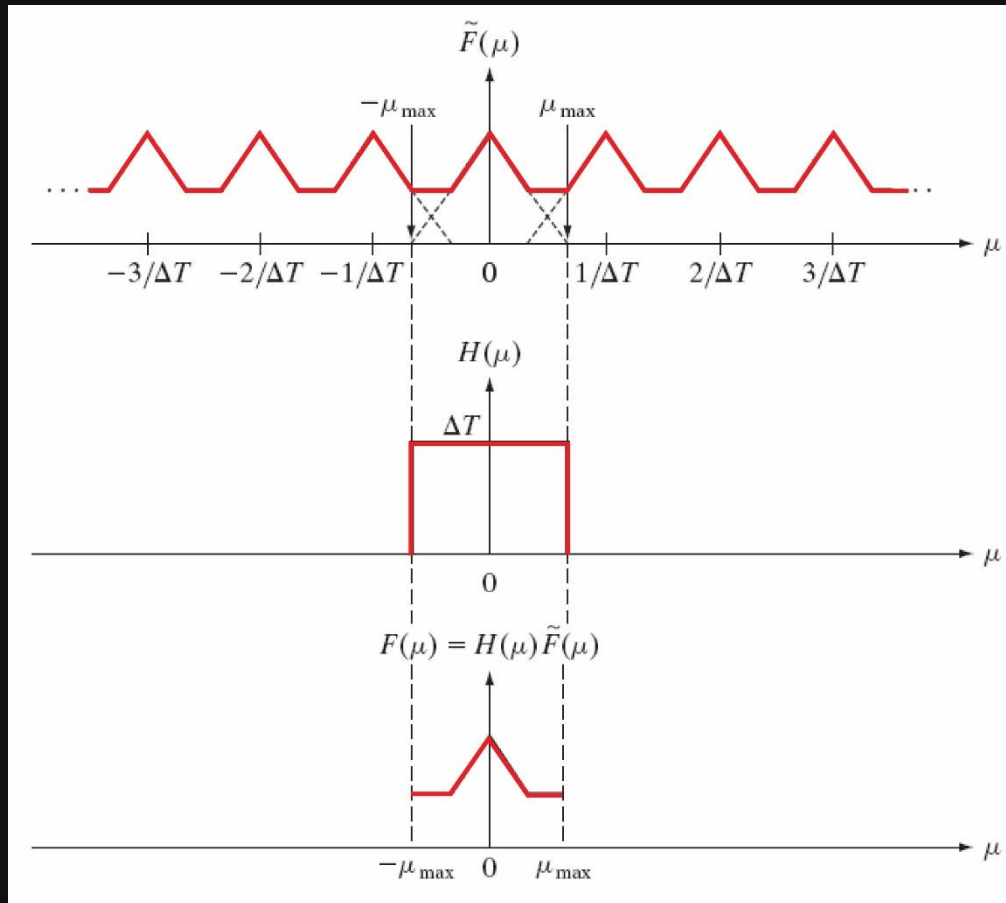
Το γινόμενο των δύο πάνω
συναρτήσεων που χρησιμοποιείται για
την εξαγωγή μιας περιόδου από την
περιοδική ακολουθία άπειρου μήκους

Το φαινόμενο της αναδίπλωσης



Οι δύο παραπάνω συναρτήσεις είναι διαφορετικές, αλλά οι ψηφιοποιημένες εκδόσεις τους (δεξιά) είναι ίδιες.

Η αναδίπλωση στην συχνότητα



Μετασχηματισμός Fourier συνάρτησης περιορισμένου φάσματος με υποδειγματοληψία

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός κατωδιαβατού φίλτρου

Παρατηρήστε το φαινόμενο της αναδίπλωσης λόγω της συμβολής παρακείμενων περιόδων που αποτρέπει την ανακατασκευή της $F(\mu)$ και τελικώς της $f(t)$

Διάκριτος μετασχηματισμός Fourier συνάρτησης μίας μεταβλητής

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad \text{for } u = 0, 1, 2, \dots, M - 1. \quad (4.2-5)$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M} \quad \text{for } x = 0, 1, 2, \dots, M - 1. \quad (4.2-6)$$

$$F(u) = |F(u)| e^{-j\phi(u)}$$

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2}$$

$$\phi(u) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$$

Σχέση δειγματοληψίας και διαστημάτων συχνότητας

- Εάν έχουμε μια συνάρτηση που αποτελείται από M δείγματα τα οποία απέχουν αποστάσεις ίσες με ΔT , η συνολική της διάρκεια είναι ίση με

$$T = M\Delta T$$

- Η αντίστοιχη απόσταση Δu στο πεδίο της συχνότητας είναι

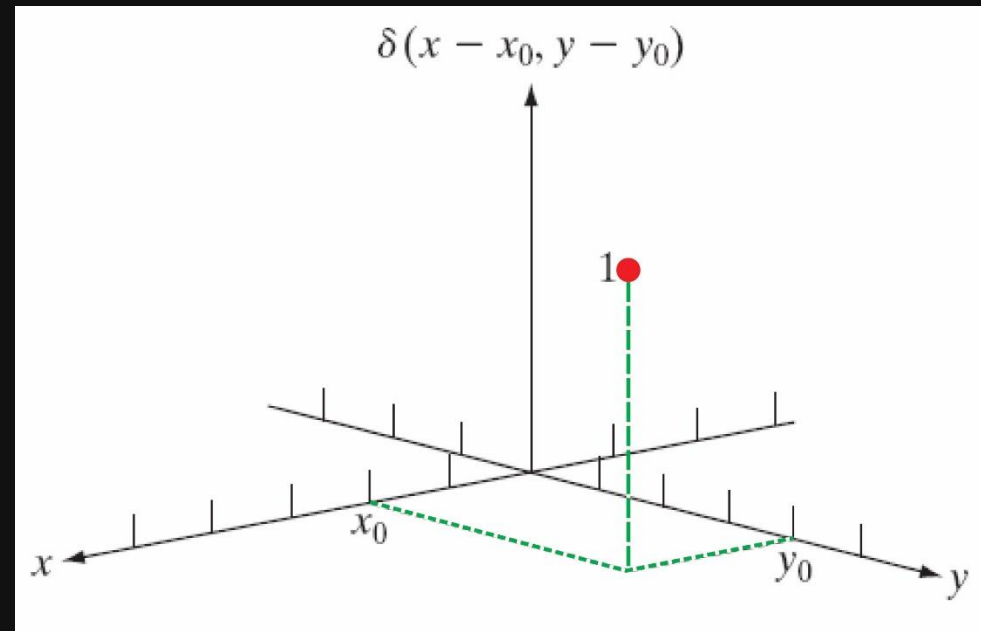
$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T} = 1/T$$

- Το σύνολο της περιοχής συχνοτήτων που καταλαμβάνεται από τις M συνιστώσες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier είναι ίσο με

$$R = M\Delta u = 1/\Delta T$$

- Προκύπτει ότι η διακριτική ανάλυση της συχνότητας Δu είναι αντιστρόφως ανάλογη με το μήκος ή την διάρκεια της εγγραφής T κατά την οποία έλαβε χώρα η δειγματοληψία της συνάρτησης $f(t)$
- Το εύρος των τιμών στις οποίες εκτείνεται ο διακριτός μετασχηματισμός εξαρτάται από το διάστημα δειγματοληψίας ΔT .

Επέκταση σε δύο διαστάσεις – η δισδιάστατη κρουστική



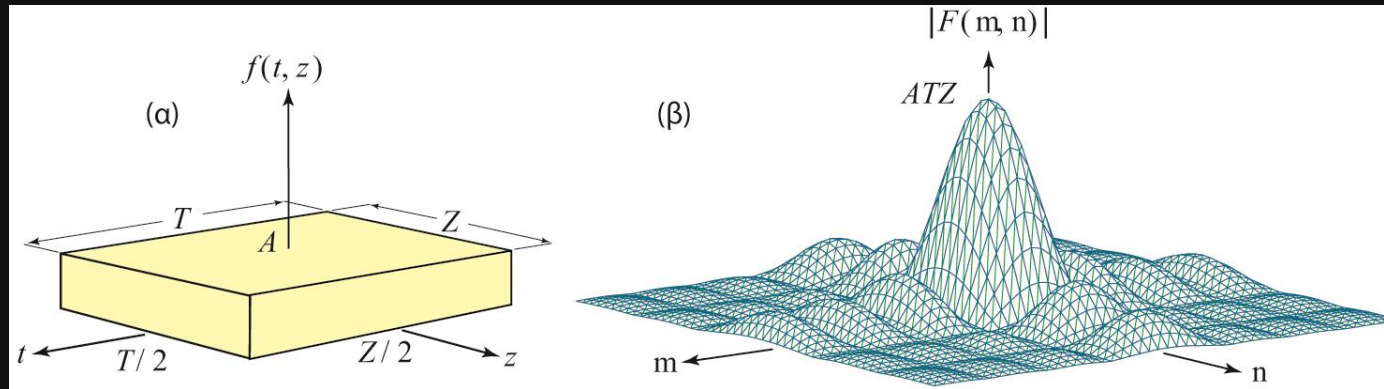
Η δισδιάστατη κρουστική ακολουθία καθυστερημένη κατά x_0 και y_0

Το διδιάστατο ζεύγος συνεχούς μετασχηματισμού Fourier

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{j2\pi(\mu t + \nu z)} d\mu d\nu$$

Ο μετασχηματισμός Fourier δισδιάστατου ορθογώνιου παραθύρου

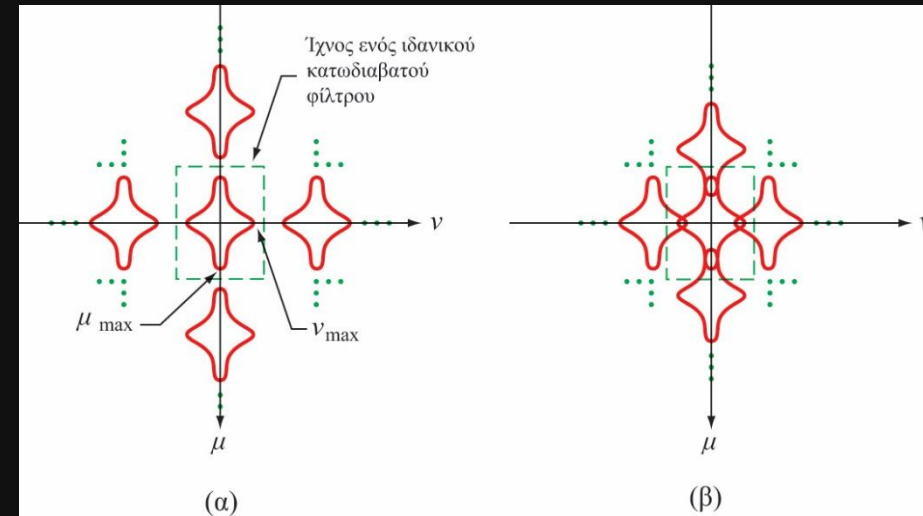
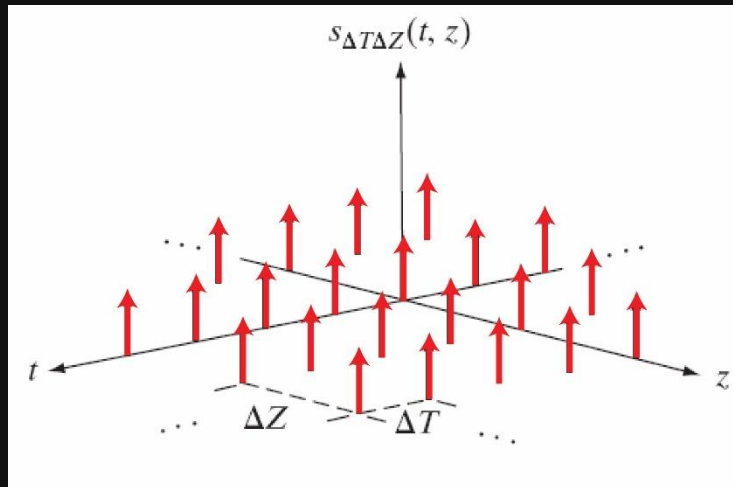


Μια δισδιάστατη συνάρτηση

Ένα τμήμα από το φάσμα της. Η συνάρτηση είναι πιο περιορισμένη ($T > Z$), συνεπώς το φάσμα της θα είναι πιο «συρρικνωμένο» στον άξονα των m .

Η δισδιάστατη δειγματοληψία και το δισδιάστατο θεώρημα δειγματοληψίας

Αν μια δισδιάστατη συνεχής συνάρτηση περιορισμένου φάσματος αναπαρίσταται από δείγματα που έχουν καταγραφεί με ρυθμούς μεγαλύτερους από το διπλάσιο του μέγιστου συχνοτικού τους περιεχομένου τόσο στην διεύθυνση μ , όσο και στην διεύθυνση των ν , τότε κατά την διαδικασία ανακατασκευής της συνάρτησης δεν προκύπτει η παραμικρή απώλεια πληροφορίας.



Η επέκταση της αναδίπλωσης στις δύο διαστάσεις.

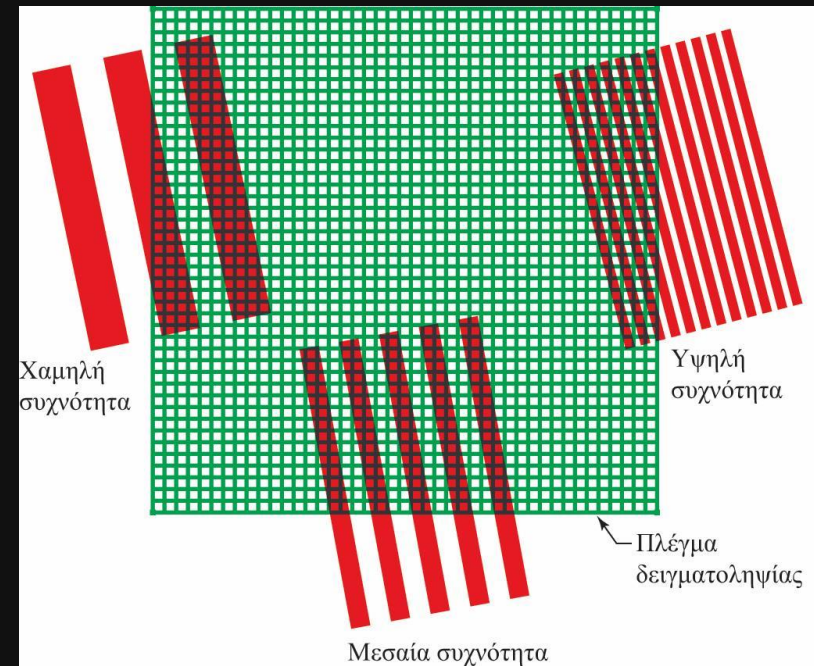
- Το φαινόμενο της αναδίπλωσης εμφανίζεται πάντοτε στις εικόνες καθώς δεν μπορούμε να έχουμε άπειρου μήκους εικόνες αλλά περιορισμένου
- Το αποτέλεσμα είναι η εμφάνιση συχνοτικών συνιστωσών που εκτείνονται στο άπειρο στο πεδίο της συχνότητας που θα αλλοιώσουν τον μετασχηματισμό
- Η αναδίπλωση στις εικόνες εμφανίζεται με δύο τρόπους:
 - ▣ Χωρική αναδίπλωση
 - ▣ Χρονική αναδίπλωση

Είδη αναδίπλωσης σε εικόνες

- Χωρική αναδίπλωση
 - Εμφανίζεται σε εικόνες με επαναλαμβανόμενα πρότυπα.
 - Οφείλεται στην υπο-δειγματοληψία
- Χρονική αναδίπλωση
 - Σχετίζεται με τα χρονικά διαστήματα που υπάρχουν ανάμεσα σε εικόνες που ανήκουν σε ακολουθία εικόνων (βίντεο)
 - Το πιο γνωστό είναι το «φαινόμενο των τροχών του βαγονιού». Δείχνει τροχούς να κινούνται ανάποδα από την κίνηση του τρένου
 - Οφείλεται στο γεγονός ότι ο ρυθμός εμφάνισης των εικόνων είναι μικρότερος από την ταχύτητα περιστροφής του τροχού.

Χωρική αναδίπλωση

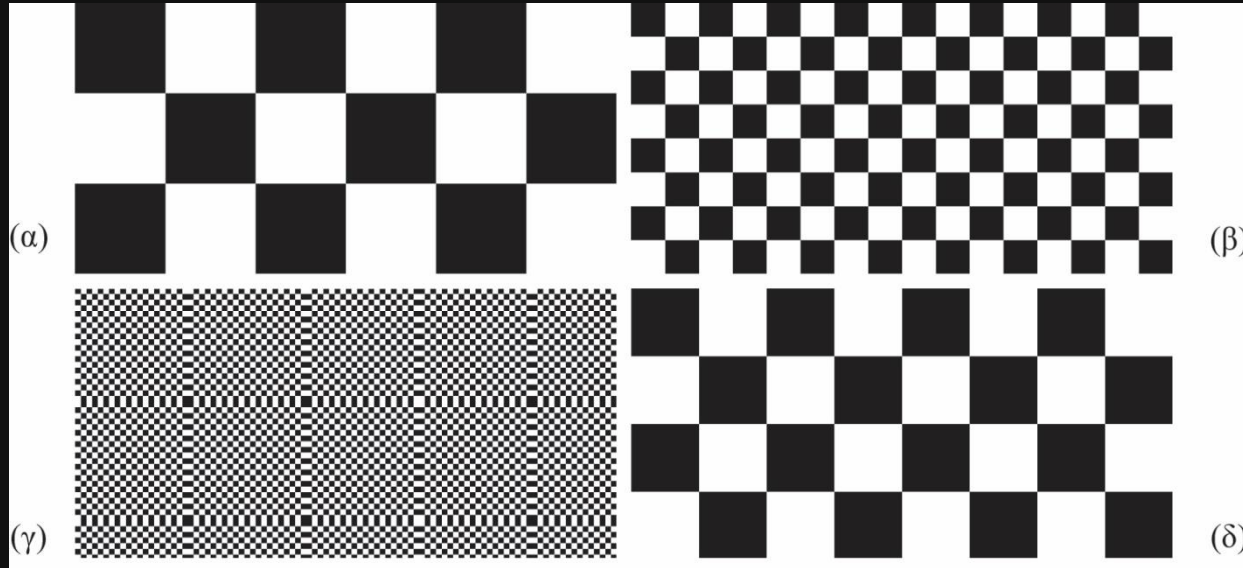
- εμφάνιση πριονωτής υφής στις γραμμές μιας εικόνας
- Πλασματικά στιγμιότυπα
- Εμφάνιση σχημάτων συχνότητας που δεν υπάρχουν στην εικόνα μας.



Δισδιάστατη αναπαράσταση του παλμού κρουστικών ώσεων. Τα λευκά είναι οι θέσεις που πραγματοποιείται δειγματοληψία. Τα μαύρα δηλώνουν την απόσταση στην δειγματοληψία

Η αναδίπλωση της συχνότητας στις εικόνες

Αναδίπλωση



Αναδίπλωση
(μοιάζει με πραγματική)

- (α) στην εικόνα τα τετράγωνα έχουν μέγεθος 16×16 – συχνότητα μπορεί να είναι $1/32$ (κάτω από την μέγιστη $1/2$)
- (β) στην εικόνα τα τετράγωνα έχουν μέγεθος 6×6 - συχνότητα μπορεί να είναι $1/12$ (κάτω από την μέγιστη $1/2$)
- (γ) τα τετράγωνα της εικόνας έχουν μέγεθος 0.95×0.95 – αναδίπλωση (πάνω από την μέγιστη $1/2$)
- (δ) στην εικόνα τα τετράγωνα έχουν μέγεθος 0.48×0.48 – αναδίπλωση (πάνω από την μέγιστη $1/2$)

Σε όλες τις περιπτώσεις, η δειγματοληψία γίνεται με μέγεθος 1×1 pixel. Για τον λόγο αυτό η μέγιστη συχνότητα για να μην έχω αναδίπλωση, είναι $1/2$ κύκλος/pixel.

Παρεμβολή και επαναδειγματοληψία εικόνων και αναδίπλωση



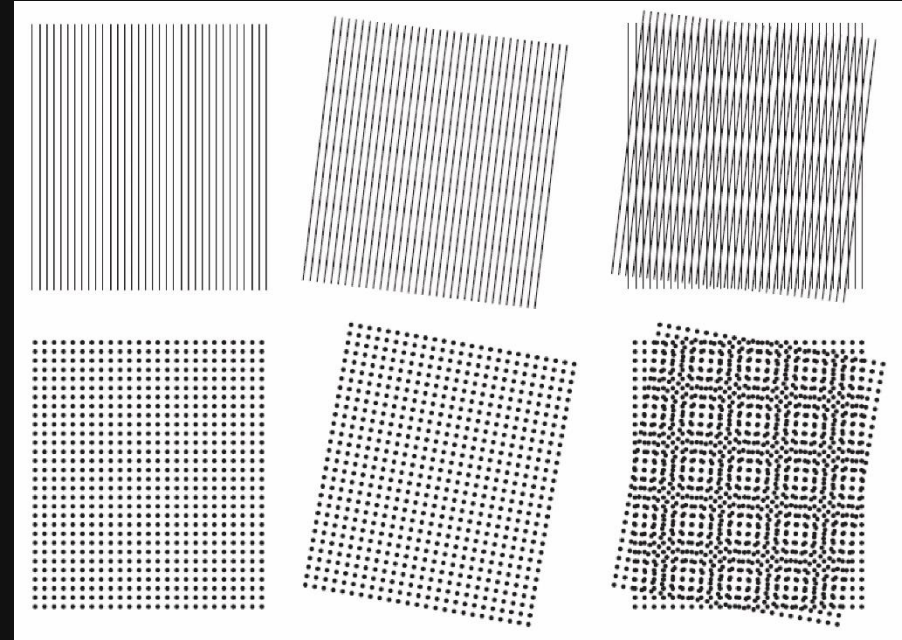
(α) μια εικόνα 772x548 με αμελητέα ορατή αναδίπλωση

(β) μεταβολή της εικόνας στο 33% του μεγέθους της και επαναφοράς στο αρχικό μέσω μεθόδου επανάληψης εικονοστοιχείων. Είναι ορατή η αναδίπλωση (μαντήλι και γόνατα)

(γ) θόλωση εικόνας (α) πρώτα με φίλτρο μέσης τιμής. Η αναδίπλωση δεν είναι τόσο εμφανής

Αναδίπλωση συχνότητας και κροσσοί moire

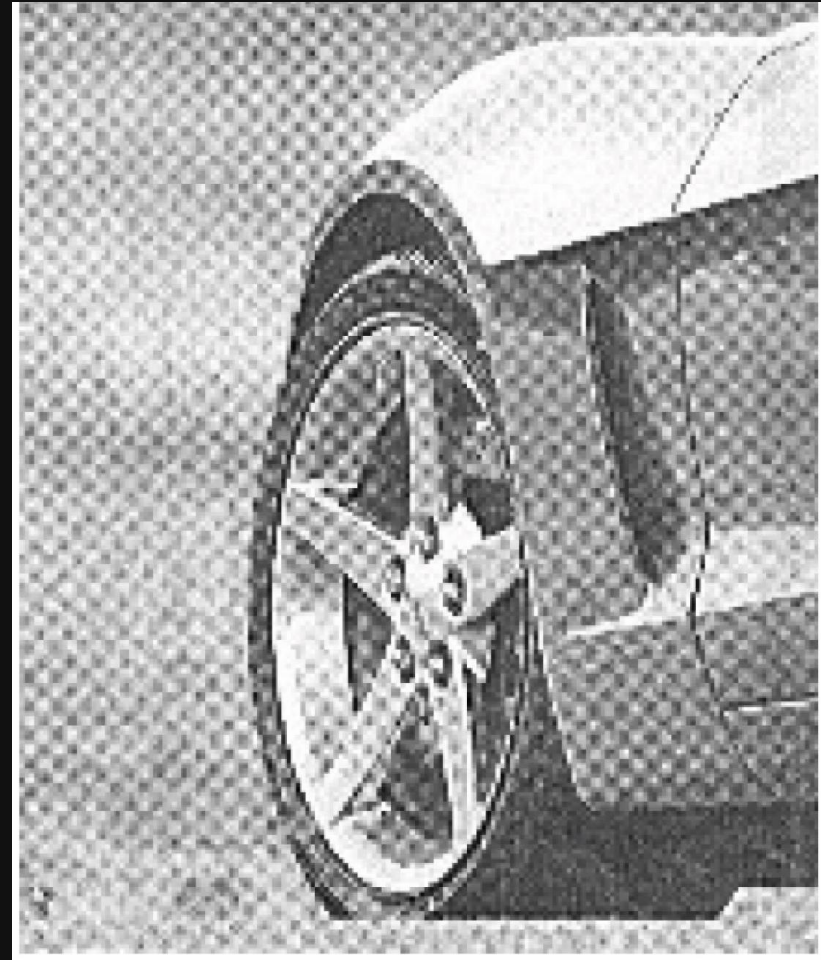
- Εμφανίζονται όταν ψηφιοποιούμε έντυπο υλικό με περιοδικές συνιστώσες, η απόσταση των οποίων είναι συγκρίσιμη με την απόσταση ανάμεσα στα δείγματα.



Οι αριστερή στήλη περιλαμβάνει εικόνες που έχουν δημιουργηθεί με το χέρι (μελάνι). Όταν τοποθετούνται όμως η μια πάνω στην άλλη, δημιουργούνται πρότυπα με συχνότητες που δεν υπάρχουν ούτε στο ένα ούτε στο άλλο μοτίβο.

Δειγματοληψία έντυπων μέσων

- Μια εικόνα εφημερίδας που έχει υποστεί δειγματοληψία στα 75dpi
- Προκύπτουν κροσσοί μοίρε από την αλληλεπίδραση ανάμεσα στον προσανατολισμό $\pm 45^\circ$ των κουκίδων μισού τόνου και των στοιχείων του πλέγματος δειγματοληψίας που χρησιμοποιήθηκε



Ο διάκριτος μετασχηματισμός Fourier στις 2 διαστάσεις

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}.$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$$

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

$$F(0, 0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y),$$

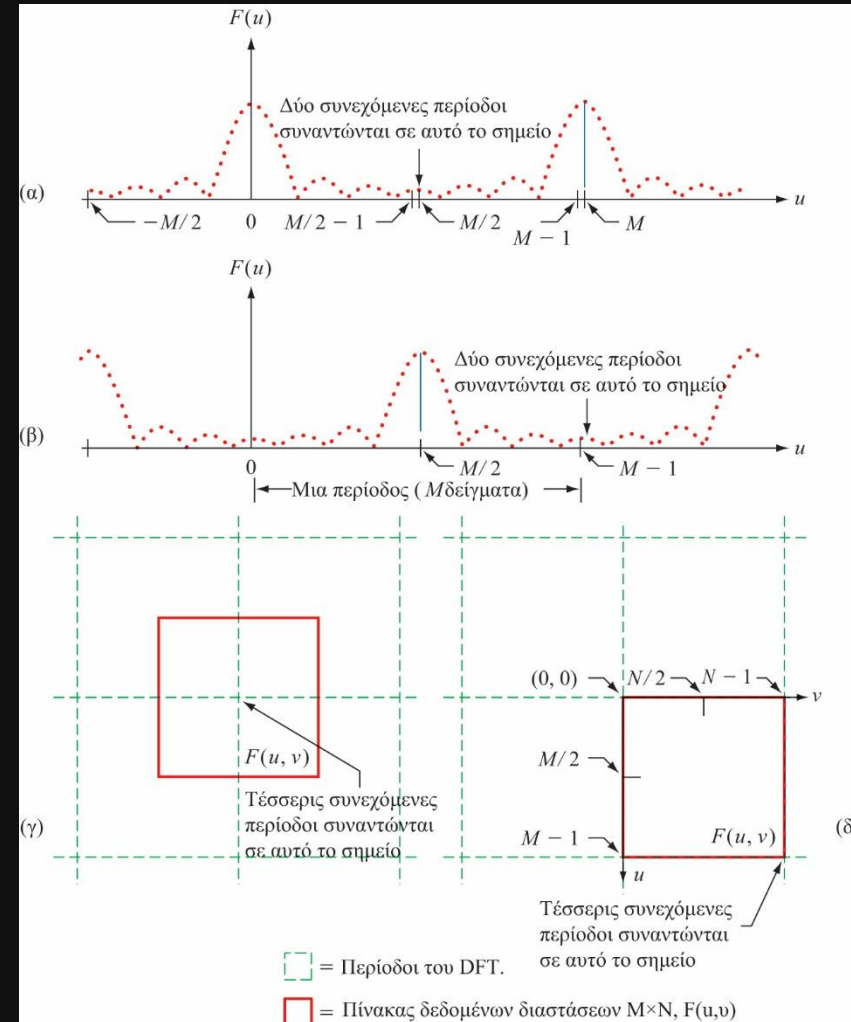
Περιοδικότητα / Συμμετρία μετασχηματισμού Fourier

Μονοδιάστατος μετασχηματισμός που χαρακτηρίζεται από άπειρο πλήθος περιόδων

Ο μετατοπισμένος μετασχηματισμός που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό με $(-1)^x$ πριν τον υπολογισμό της συνάρτησης $F(u)$

Δισδιάστατος μετασχηματισμός που χαρακτηρίζεται από άπειρο πλήθος περιόδων

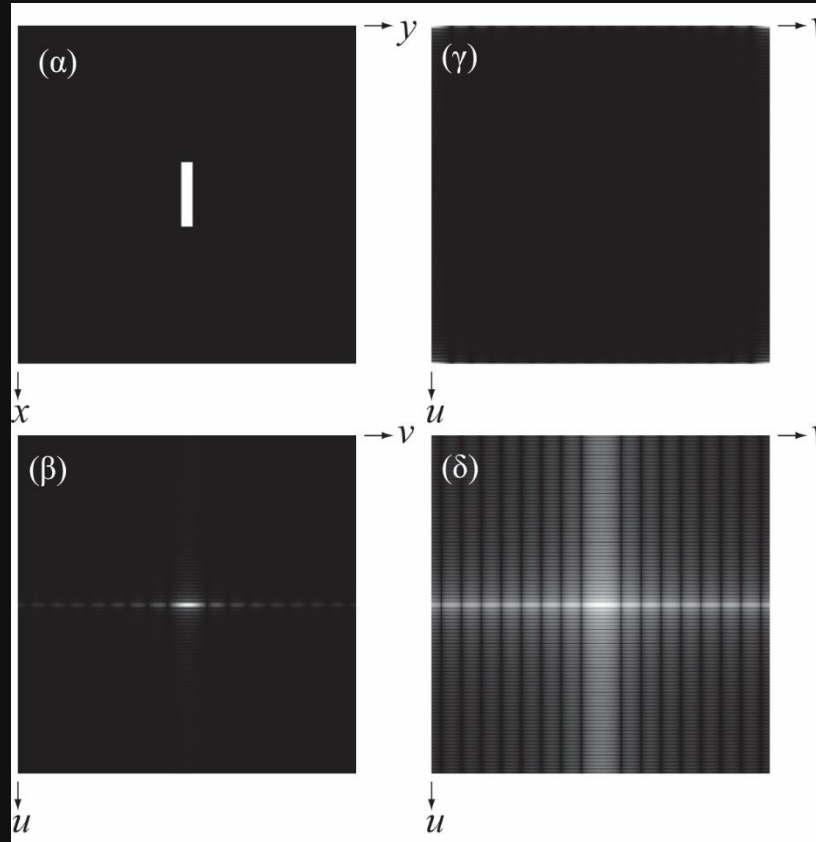
Μετατοπισμένος μετασχηματισμός που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την εικόνα με την ποσότητα $(-1)^{x+y}$ πριν τον υπολογισμό της $F(u,v)$



Βασικές ιδιότητες συμμετρίας δισδιάστατου μετασχηματισμού

	Πεδίο του χώρου	Πεδίο της συχνότητας
1)	$f(x, y)$ πραγματική	$F^*(u, v) = F(-u, -v)$
2)	$f(x, y)$ φανταστική	$F^*(-u, -v) = -F(u, v)$
3)	$f(x, y)$ πραγματική	$R(u, v)$ άρτια $I(u, v)$ περιττή
4)	$f(x, y)$ φανταστική	$R(u, v)$ περιττή $I(u, v)$ άρτια
5)	$f(-x, -y)$ πραγματική	$F^*(u, v)$ μιγαδική
6)	$f(-x, -y)$ μιγαδική	$F(-u, -v)$ μιγαδική
7)	$f^*(-x, -y)$ μιγαδική	$F^*(-u, -v)$ μιγαδική
8)	$f(x, y)$ πραγματική και άρτια	$F(u, v)$ πραγματική και άρτια
9)	$f(x, y)$ πραγματική και περιττή	$F(u, v)$ φανταστική και περιττή
10)	$f(x, y)$ φανταστική και άρτια	$F(u, v)$ φανταστική και άρτια
11)	$f(x, y)$ φανταστική και περιττή	$F(u, v)$ πραγματική και περιττή
12)	$f(x, y)$ μιγαδική και άρτια	$F(u, v)$ μιγαδική και άρτια
13)	$f(x, y)$ μιγαδική και περιττή	$F(u, v)$ μιγαδική και περιττή

Φάσμα Fourier και γωνία φάσης



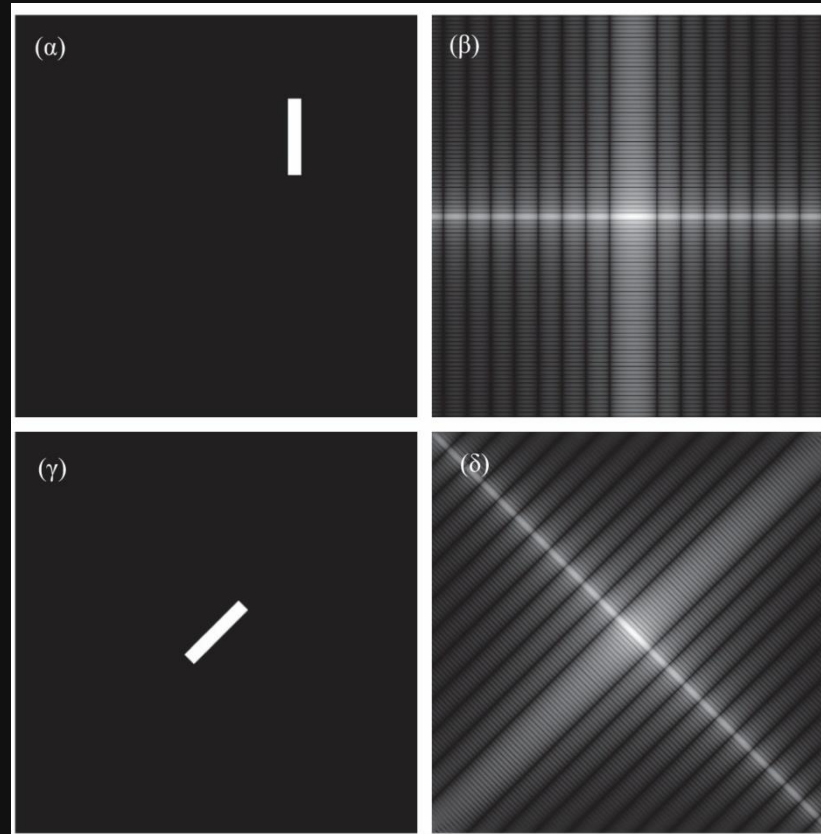
(α) εικόνα τετραγώνου

(β) το φάσμα της (α) εικόνας χωρίς κανέναν μετασχηματισμό και με εμφανή την περιοδικότητα στις 4 κατευθύνσεις

(γ) το κεντραρισμένο φάσμα στο $(0,0)$ μετά την εφαρμογή του πολλαπλασιασμού με τον όρο $(-1)^{x+y}$

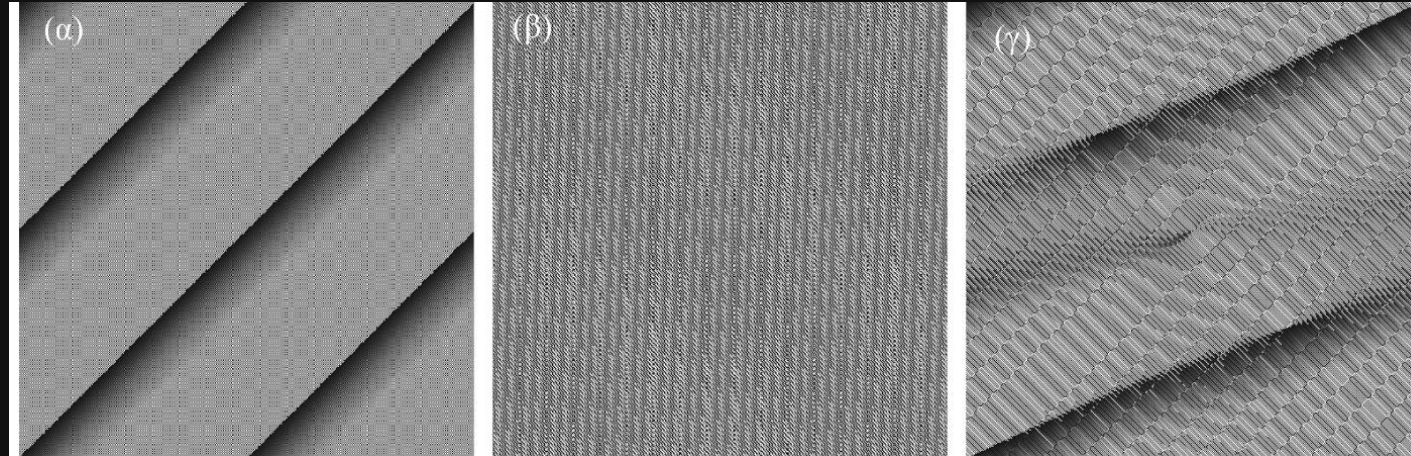
(δ) λογαριθμικός μετασχηματισμός φάσματος με χρήση του $(1 + \log|F(u, v)|)$

Φάσμα μετατόπισης και περιστροφής



- (α) εικόνα μετατοπισμένου τετραγώνου
(β) το φάσμα της (α) εικόνας το οποίο είναι ίδιο με αυτό της προηγούμενης εικόνας
(γ) περιστραμμένη εικόνα κατά 45ο
(δ) το περιστραμμένο φάσμα της εικόνας (γ)

Φάση του φάσματος



(α) πίνακας γωνιών φάσης του κεντραρισμένου τετραγώνου
(β) ο πίνακας του μετατοπισμένου τετραγώνου
(γ) ο πίνακας του περιστραμμένου τετραγώνου

- Η ανάλυση με το μάτι των εικόνων που αφορούν τις γωνίες φάσεις δεν δίνει μεγάλη διαισθητική πληροφορία.
- Θα περιμέναμε η εικόνα (α) να αντιστοιχούσε στο περιστραμμένο μοτίβο καθώς εμφανίζει έντονα κλίσεις 45° . Αντ' αυτού, η εικόνα (γ) παρουσιάζει περιστραμμένο μοτίβο αλλά με μικρότερη γωνία από 45° .

Πληροφορία του φάσματος εικόνας

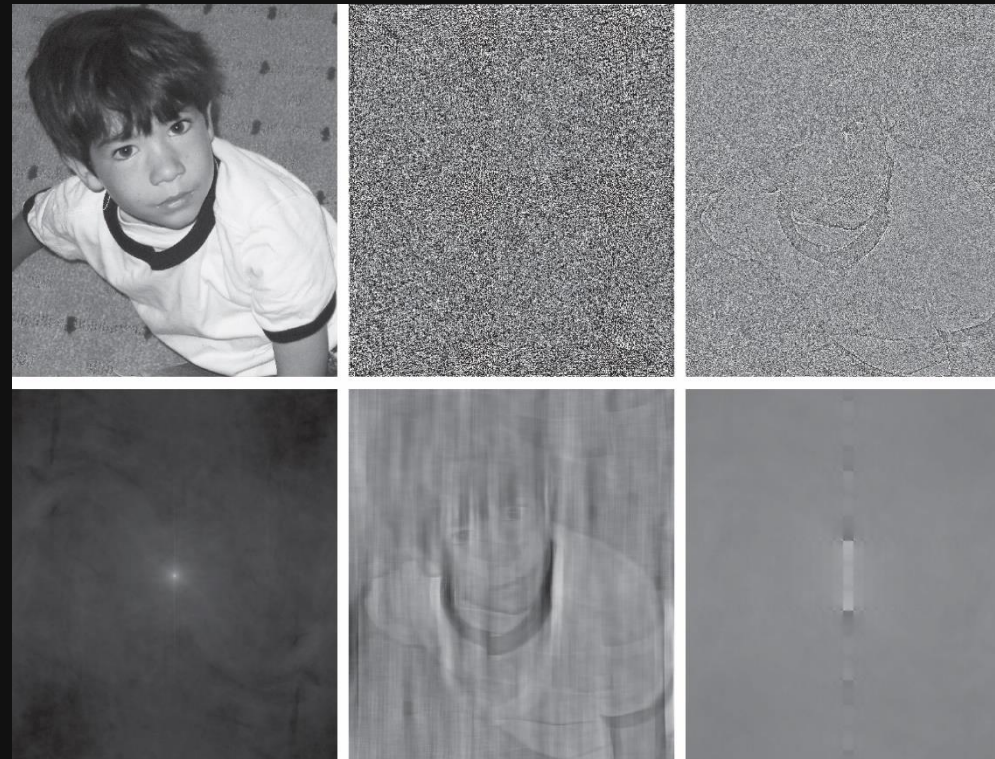
- Μέτρο του φάσματος
 - ▣ Οι συνιστώσες προσδιορίζουν τα πλάτη των ημιτόνων που συνδυάζονται μεταξύ τους για να φτιάξουν την εικόνα
 - ▣ Μεγάλο πλάτος, υπονοεί μεγάλη έξαρση όσον αφορά στην εμφάνιση ημιτόνου στην εικόνα
- Φάση του φάσματος
 - ▣ Αποτελεί μέτρο της μετατόπισης διάφορων συνιστωσών σε σχέση με την αρχή τους.

Το μέτρο έχει συντελεστές που καθορίζουν τις εντάσεις της εικόνας, ενώ η φάση δείχνει τις γωνίες που περιέχουν αρκετή από την πληροφορία σχετικά με το ποια διακρίσιμα αντικείμενα εμπεριέχονται στην εικόνα

Παράδειγμα συνεισφοράς μέτρου – φάσης του φάσματος εικόνας

Γωνία φάσης

Αρχική εικόνα



Ανακατασκευή από την γωνία φάσης, μέτρο φάσματος = 1 (πληροφορία σχημάτων)

Ανακατασκευή μόνο από το μέτρο του φάσματος. Η γωνία θεωρείται ίση με 0. (πληροφορία φωτεινότητων)

Ανακατασκευή εικόνας ορθογωνίου με μέτρο φάσματος του παιδιού και φάσης της εικόνας τετραγώνου

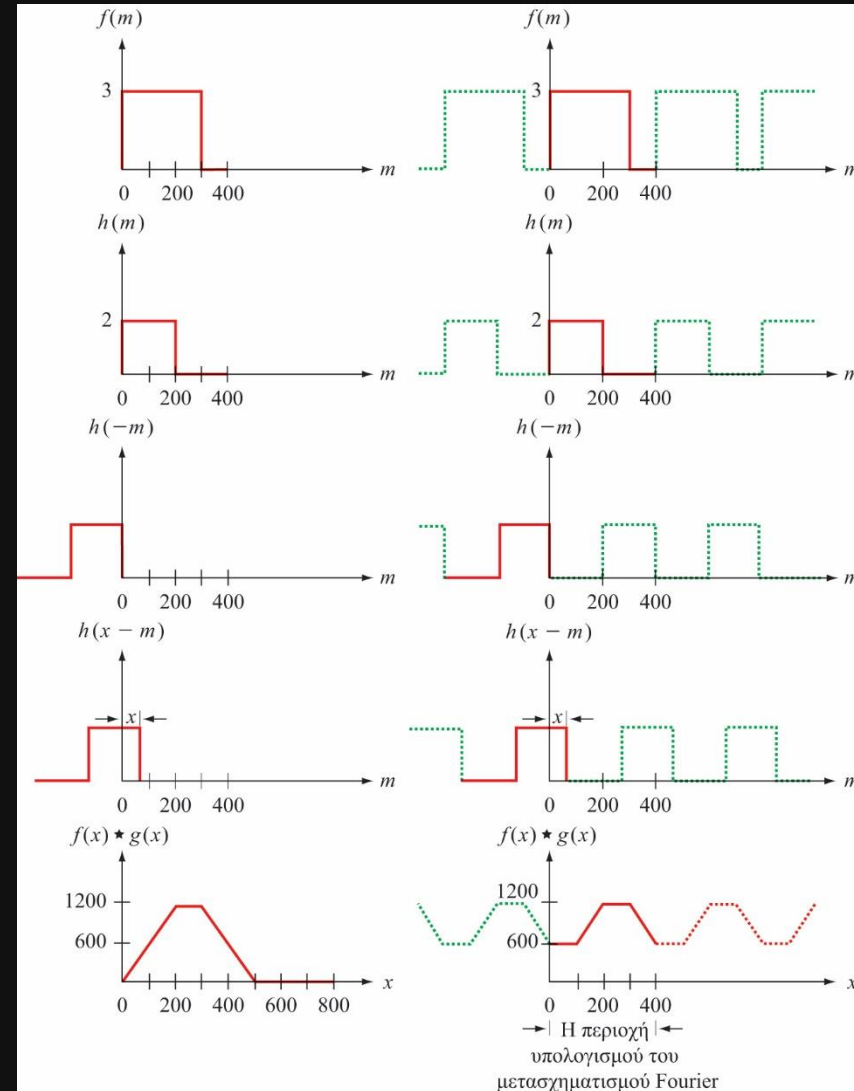
Ανακατασκευή από γωνία φάσης της αρχικής εικόνας (παιδί) και φάσμα του τετραγώνου

Το διδιάστατο θεώρημα της συνέλιξης

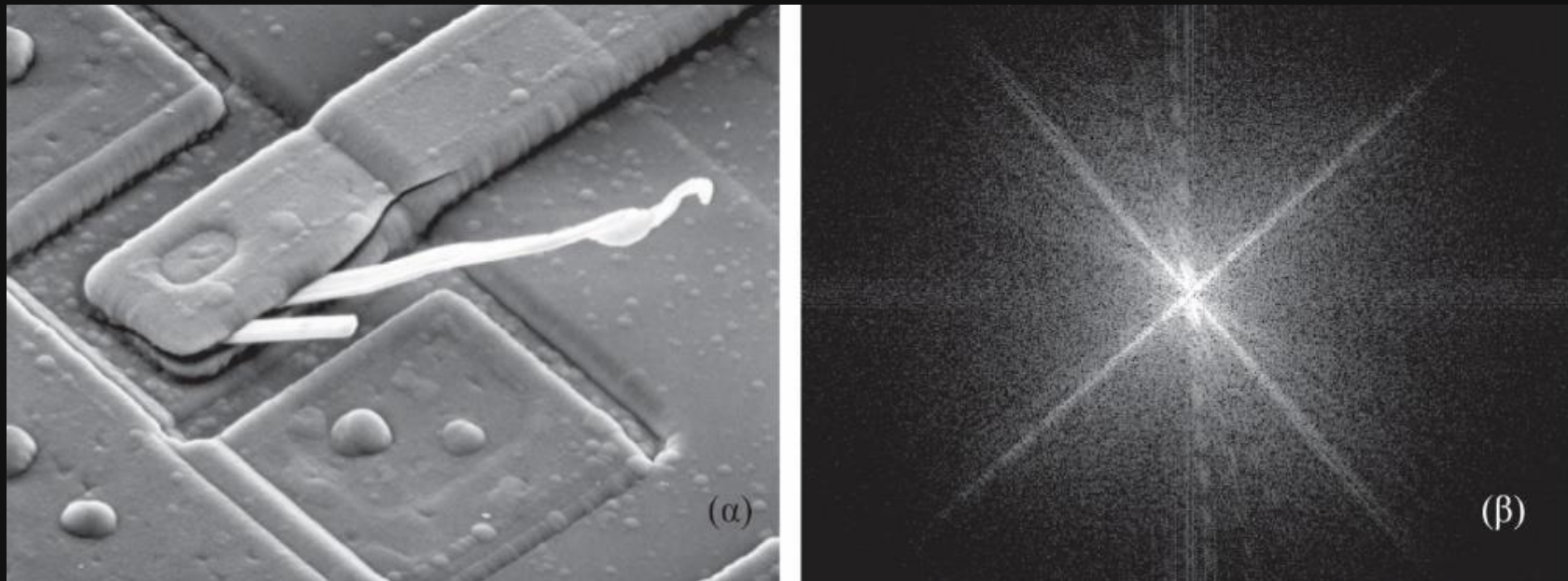
$$(f \star h)(x, y) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$

$$(f \star h)(x, y) \leftrightarrow (F \cdot H)(u, v)$$

$$(f \cdot h)(x, y) \leftrightarrow \frac{1}{MN} (F \star H)(u, v)$$



Παράδειγμα μετασχηματισμού εικόνας



(α) εικόνα τύπου SEM ενός κατεστραμμένου ολοκληρωμένου κυκλώματος και (β) το φάσμα Fourier της εικόνας

Χαρακτηριστικά φιλτραρίσματος στο πεδίο της συχνότητας

- Για τον υπολογισμό του φιλτραρίσματος εικόνας στο πεδίο της συχνότητας θα πρέπει να υπολογίσουμε το τροποποιημένο μετασχηματισμό Fourier μιας εικόνας και στη συνέχεια του αντίστροφου μετασχηματισμού

$$g(x, y) = F^{-1}[H(u, v)F(u, v)]$$

- Για τον προσδιορισμό της χρησιμοποιούμε συμμετρικές ως προς το κέντρο συναρτήσεις, συνεπώς και τον μετασχηματισμό της εικόνας τον υπολογίζουμε πολλαπλασιάζοντας την εικόνα με τον όρο

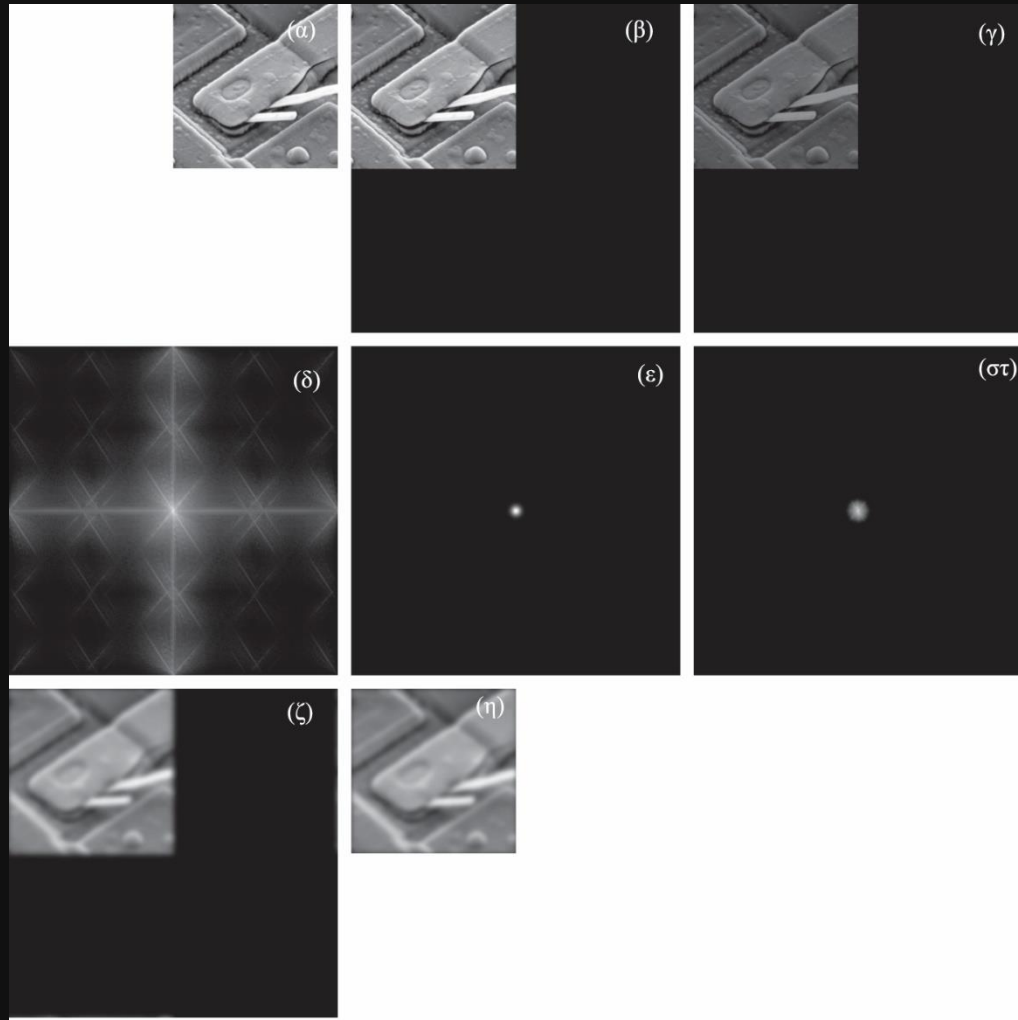
Συχνότητα και Εικόνα

- Η DC συνιστώσα του μετασχηματισμού Fourier της εικόνας δείχνει την μέση φωτεινότητα της εικόνας
- Καθώς απομακρυνόμαστε από την αρχή του μετασχηματισμού, οι χαμηλές συχνότητες αντιστοιχούν στα στοιχεία της εικόνας που μεταβάλλονται αργά (π.χ. τοίχος με μικρή αλλαγή χρώματος)
- Οι μεγάλες συχνότητες αντιστοιχούν σε γρήγορες αλλαγές περιοχών φωτεινοτήτων (ακμές αντικειμένων)

Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

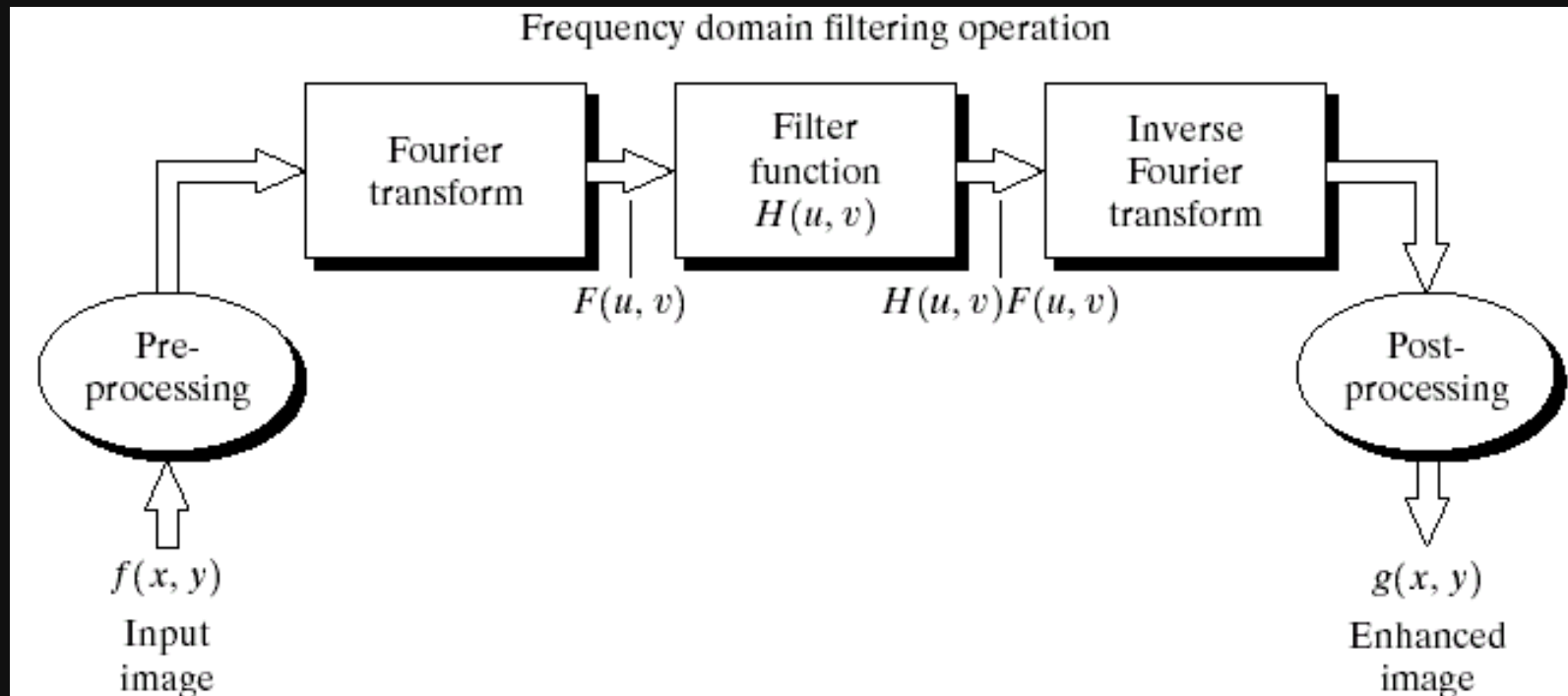
- Επέκταση της εικόνας διαστάσεων $M \times N$ ώστε να γίνει διαστάσεων $P=2M$ και $Q=2N$ με επέκταση (zero, mirror, replicate)
- Πολλαπλασιασμός της εικόνας με τον όρο $(-1)^{x+y}$ για να τοποθετήσουμε στο κέντρο τον μετασχηματισμό Fourier στο $P \times Q$ τετράγωνο χώρο συχνοτήτων
- Υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier
- Πολλαπλασιασμός με την απόκριση συχνότητας ενός πραγματικού, συμμετρικού φίλτρου διαστάσεων $P \times Q$ με το κέντρο του στο $(P/2, Q/2)$
- Υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού του παραπάνω για να βρούμε την φιλτραρισμένη εικόνα
- Κρατάμε το πραγματικό μέρος του αποτελέσματος
- Πολλαπλασιασμός της εικόνας με τον όρο $(-1)^{x+y}$
- η τελική εικόνα έχει το ίδιο μέγεθος με την αρχική κρατώντας τα $M \times N$ εικονοστοιχεία από την πάνω αριστερή θέση.

Διαδικασία φιλτραρίσματος με συμπλήρωση μηδενικών

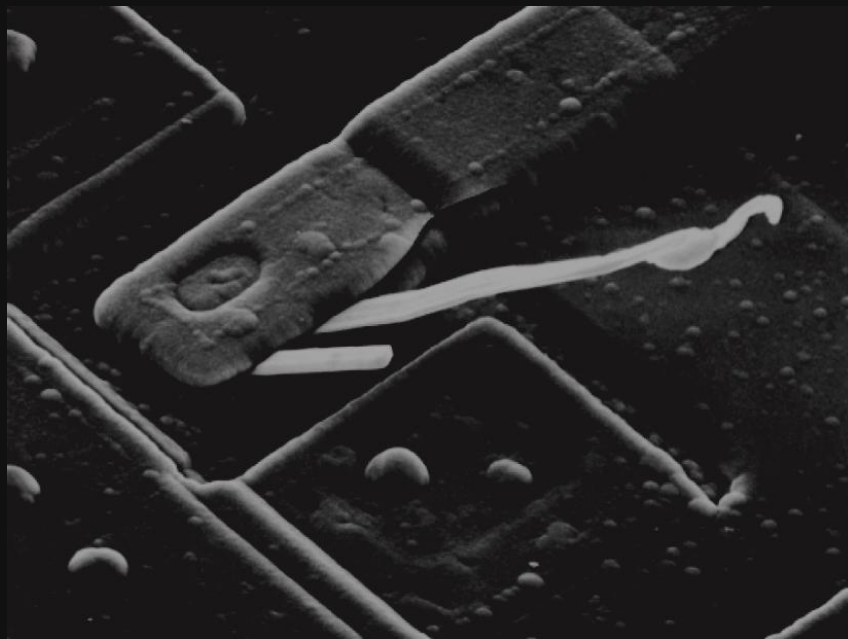


- (α) αρχική εικόνα
- (β) συμπληρωμένη με μηδενικά ΡΧQ
- (γ) πολλαπλασιασμός με τον όρο
- (δ) το φάσμα της εικόνας που προκύπτει
- (ε) ένα κατωδιαβατό φίλτρο κεντραρισμένο τύπου Gauss ΡΧQ
- (στ) το φάσμα του γινομένου της εικόνας με το φίλτρο
- (ζ) το γινόμενο του πραγματικού μέρους του αντίστροφου μετασχηματισμού του αποτελέσματος με τον όρο
- (η) η τελική φιλτραρισμένη εικόνα που προκύπτει διατηρώντας τις πρώτες M γραμμές και N στήλες από το αποτέλεσμα.

Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας



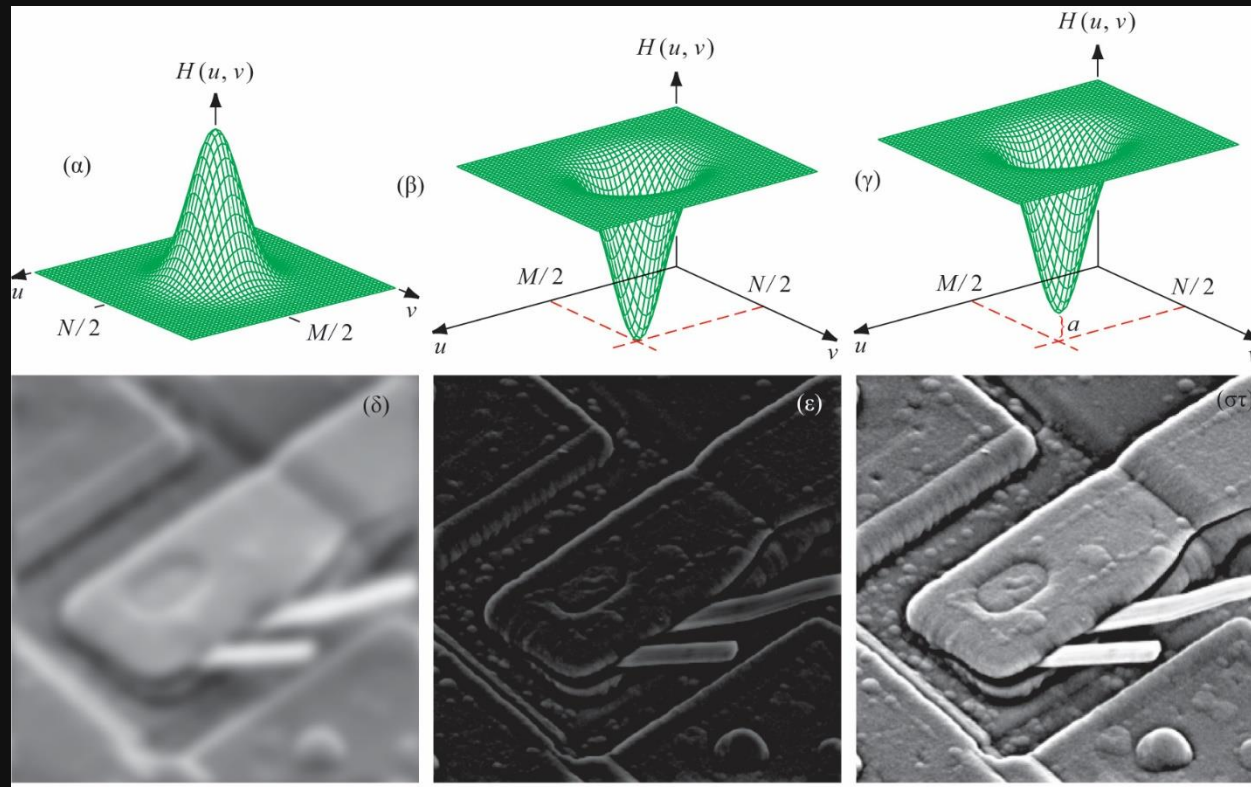
Παράδειγμα φιλτραρίσματος εικόνας – Απομάκρυνση DC συνιστώσας



- μείωση της μέσης φωτεινότητας
- ξεχωρίζουν καλύτερα οι ακμές της εικόνας
- δεν είναι η μέση τιμή των φωτεινοτήτων μηδέν πραγματικά (δεν υπάρχουν αρνητικές φωτεινότητες)

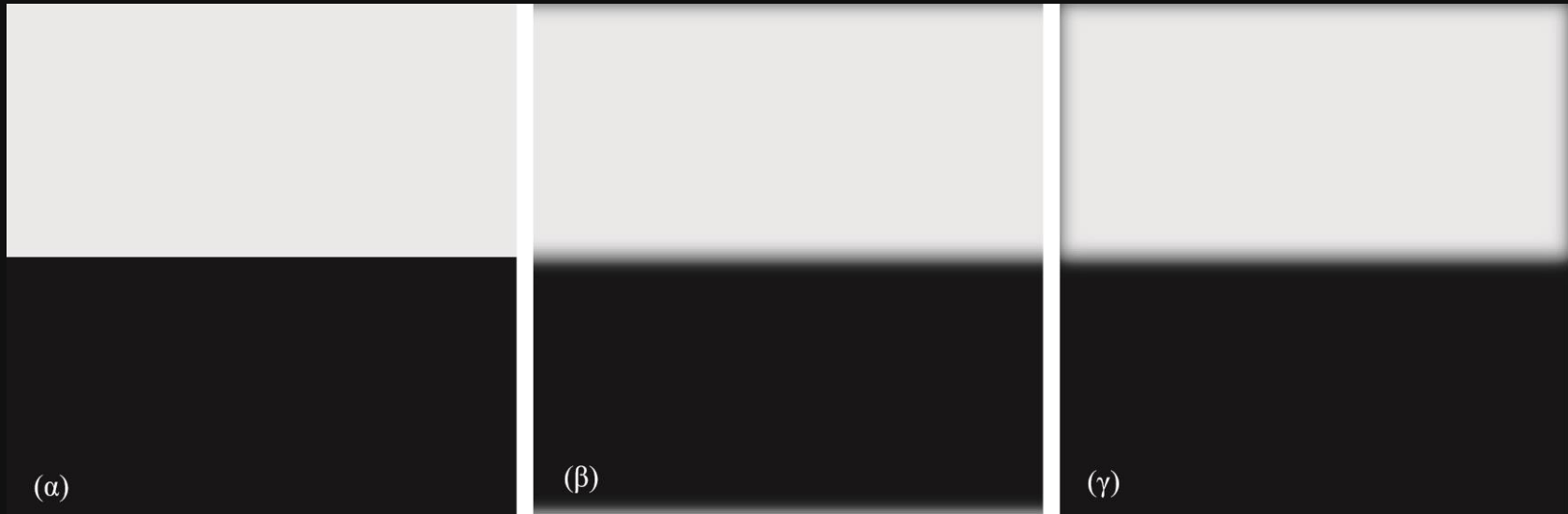
$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } (u, v) = (M/2, N/2) \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Φιλτράρισμα εικόνων



Πάνω: συναρτήσεις μεταφοράς φίλτρων στο πεδίο της συχνότητας (α) κατωδιαβατό φίλτρο (β) ανωδιαβατό φίλτρο (γ) μετατοπισμένο ανωδιαβατό φίλτρο
Κάτω: οι εικόνες που προκύπτουν με εφαρμογή των φίλτρων αυτών στην προηγούμενη εικόνα. Στην (γ) η μετατόπιση είναι ίση με 0.85 και το ύψος της $|H(u,v)|$ είναι ίση με 1

Συμπλήρωση με μηδενικά πριν το φιλτράρισμα εικόνων

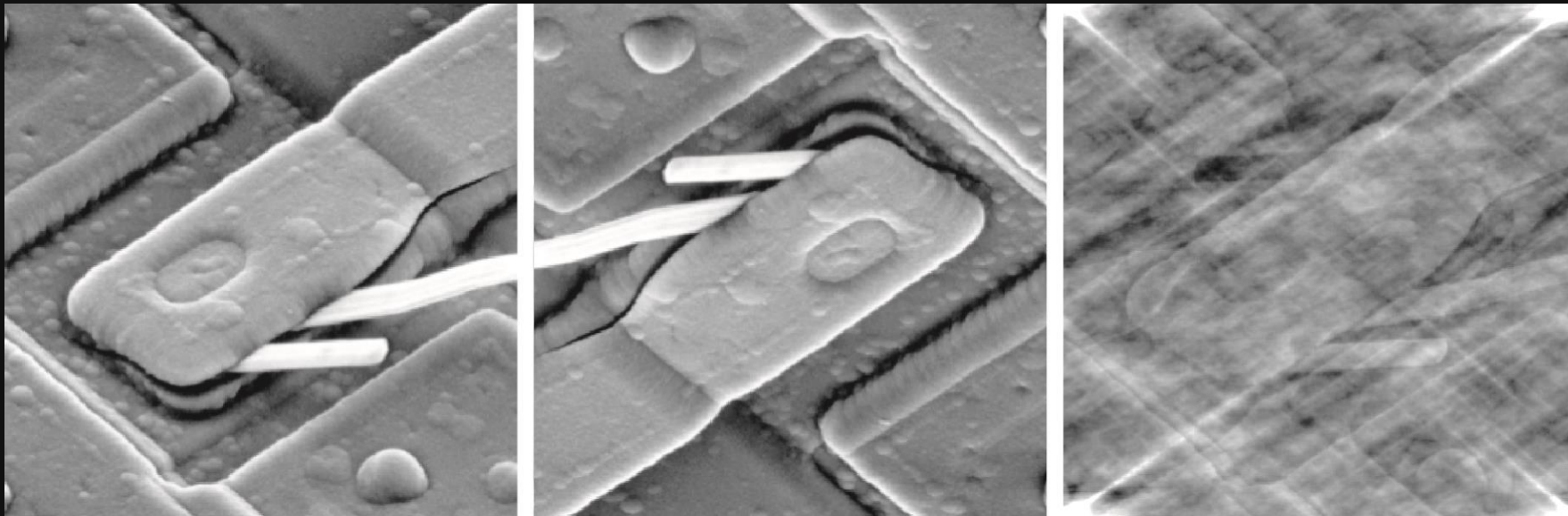


(α) μια απλή εικόνα (β) θόλωση που προκύπτει με εφαρμογή φίλτρου Gauss χωρίς συμπλήρωση με μηδενικά. Δείτε ότι πλευρικά δεν υπάρχει θόλωση (γ) αποτέλεσμα ίδιας διαδικασίας φιλτραρίσματος με συμπλήρωση με μηδενικά.

Ανάλυση της γωνίας φάσης των φιλτραρισμένων εικόνων

- Τα φίλτρα που επηρεάζουν εξίσου το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού της εικόνας, δεν έχουν καμία επίδραση στην φάση και καλούνται φίλτρα μηδενικής μετατόπισης φάσης
- Τα φίλτρα αυτά είναι ο μοναδικός τύπος φίλτρων με τα οποία θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο αυτό.

Ανάλυση της γωνίας φάσης των φιλτραρισμένων εικόνων



(α) αρχική εικόνα (β) εικόνα που έχει προκύψει από τον πολλαπλασιασμό της γωνίας φάσης με -1 και υπολογισμό στη συνέχεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier (γ) το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού της φάσης με 0.25 και στη συνέχεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier. Στις παραπάνω εικόνες το μέτρο του φάσματος έχει μείνει ίδιο με αυτό της αρχικής εικόνας.

Αντιστοιχία ανάμεσα στο φιλτράρισμα στα πεδία του χώρου και της συχνότητας

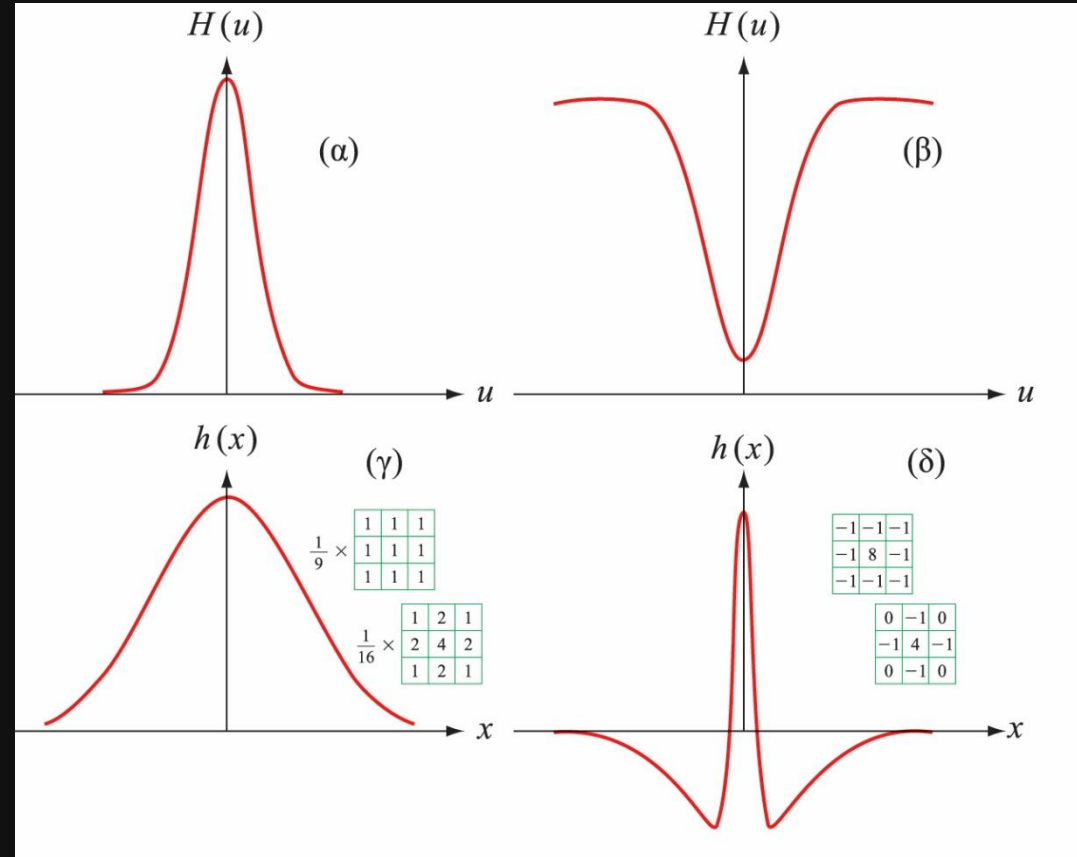
- Τα φίλτρα που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο στο πεδίο του χώρου, μπορούν να αντιστοιχηθούν με φίλτρα στο πεδίο της συχνότητας μέσω του μετασχηματισμού Fourier.

$$h(x, y) \leftrightarrow H(u, v)$$

- Επειδή όλες οι παραπάνω ποσότητες είναι πεπερασμένες, τα φίλτρα αυτά αναφέρονται ως φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης
- Επειδή είναι πιο εύκολο διαισθητικά να αντιληφθούμε φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας, καθορίζουμε το φίλτρο στη συχνότητα και μετά μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση του φίλτρου
- Κατόπιν χρησιμοποιώντας ως οδηγό το πλήρους μεγέθους χωρικό φίλτρο, κατασκευάζουμε μικρούς χωρικούς πυρήνες
- Το ίδιο μπορεί να γίνει και αντίστροφα για την ανάλυση της συμπεριφοράς μικρών χωρικών φίλτρων στην συχνότητα.
- Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα φίλτρα Gauss καθώς έχουν ευθύ και αντίστροφο μετασχηματισμό πραγματικές συναρτήσεις ίδιου τύπου.

Αντιστοιχία ανάμεσα στο φιλτράρισμα στα πεδία του χώρου και της συχνότητας

Μονοδιάστατη
κατωδιαβατή
συνάρτηση τύπου
Gauss (συχνότητα)



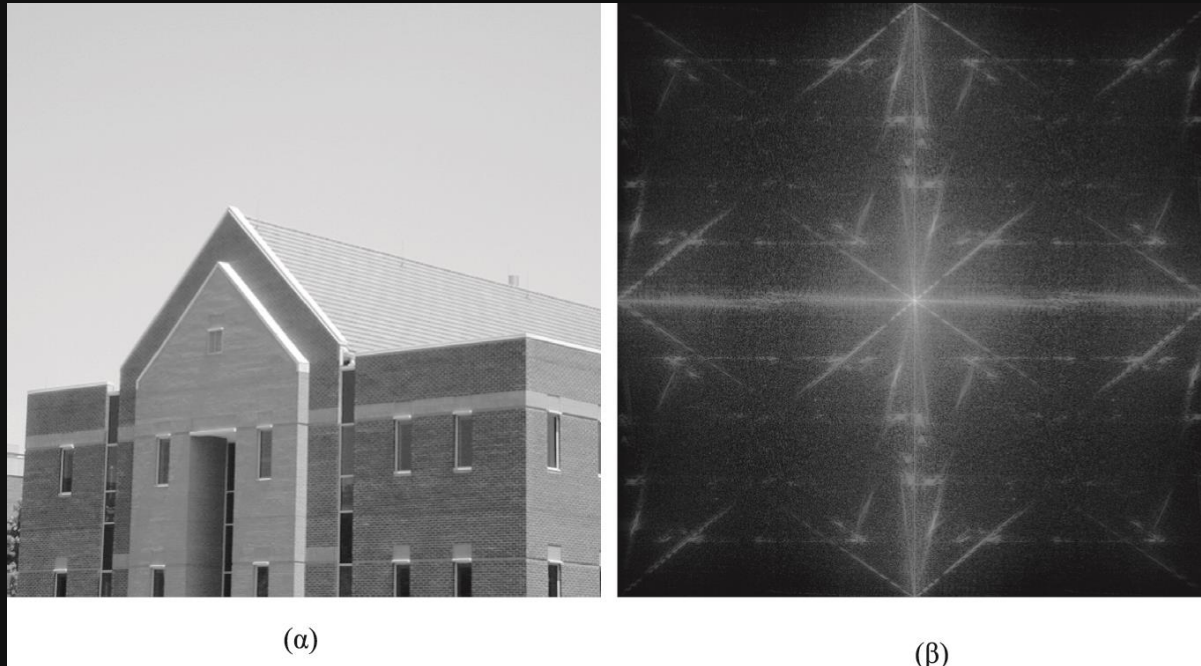
Ο αντίστοιχος πυρήνας
στο πεδίο του χώρου

Μονοδιάστατη
ανωδιαβατή
συνάρτηση τύπου
Gauss (συχνότητα)

Ο αντίστοιχος πυρήνας
στο πεδίο του χώρου

- Παρατηρούμε το αντίστροφο ως προς το εύρος των φίλτρων στον χρόνο και τη συχνότητα
 - Οι συντελεστές των φίλτρων στον χώρο προκύπτουν από το σχήμα της $h(n)$

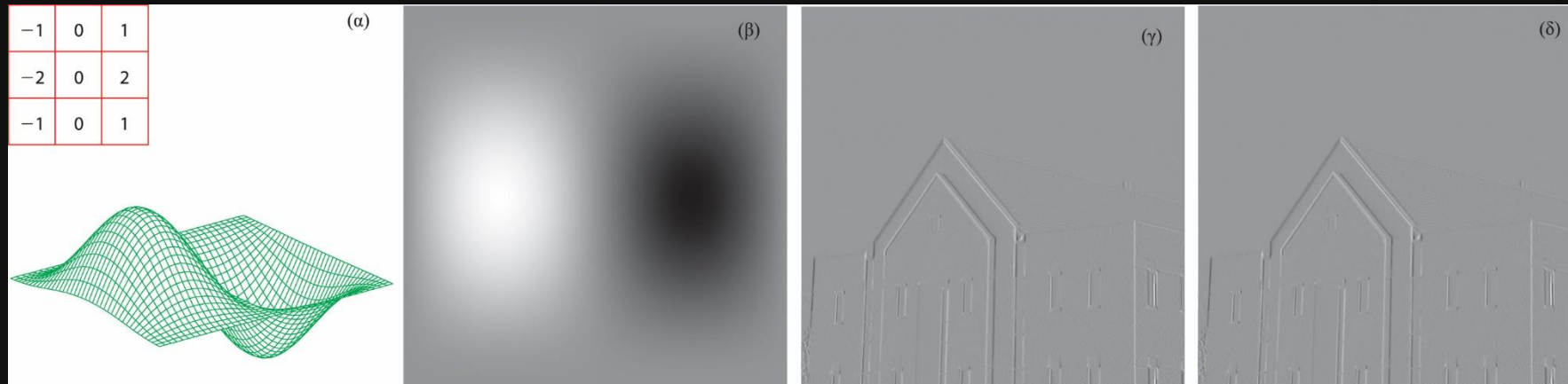
Υπολογισμός συνάρτησης μεταφοράς φίλτρου στο πεδίο συχνότητας από χωρικό πυρήνα



(α)
αρχική εικόνα

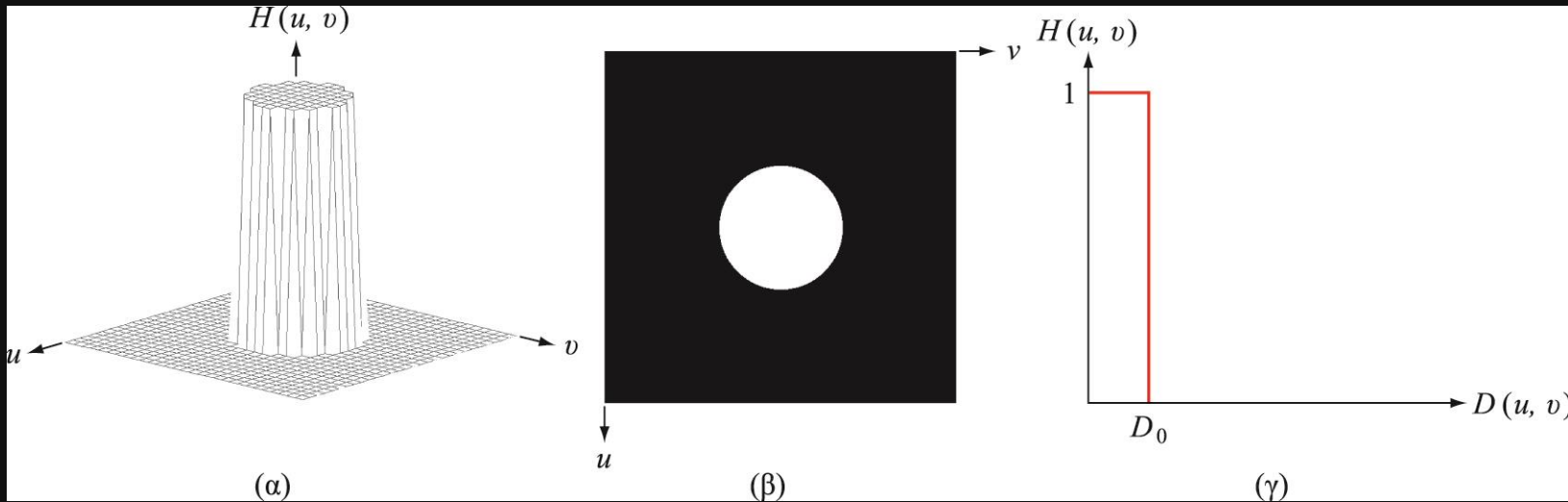
(β)
Φάσμα της αρχικής εικόνας κατά
Fourier

Υπολογισμός συνάρτησης μεταφοράς φίλτρου στο πεδίο συχνότητας από χωρικό πυρήνα



(α) χωρική μάσκα και το προοπτικό γράφημα του αντίστοιχου φίλτρου στο πεδίο της συχνότητας (β) το φίλτρο σε μορφή εικόνας (γ) αποτέλεσμα φιλτραρίσματος στο πεδίο της συχνότητας με χρήση του φάσματος της εικόνας (δ) αποτέλεσμα φιλτραρίσματος στο πεδίο του χώρου

Εξομάλυνση με κατωδιαβατά φίλτρα στο πεδίο συχνότητας



(α) προοπτικό διάγραμμα συνάρτησης ενός ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου (β) η συνάρτηση ως εικόνα (γ) μια ακτινική διατομή του φίλτρου

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

Όπου D_0 είναι μια θετική σταθερά και $D(u, v)$ είναι η απόσταση ενός σημείου (u, v) από το κέντρο του τετραγώνου της συχνότητας $D(u, v) = [(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2]^{1/2}$

Σύγκριση κατωδιαβατών φίλτρων

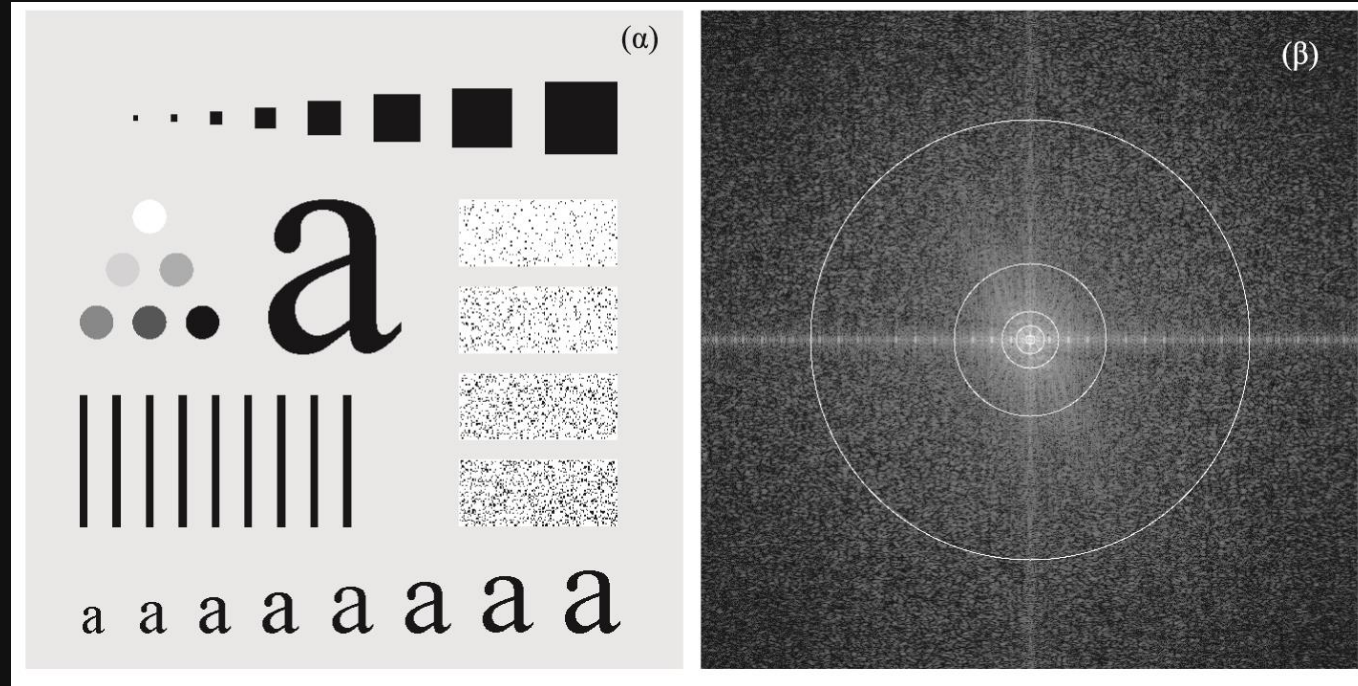
- Για να συγκρίνουμε κατωδιαβατά φίλτρα μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο από γεωμετρικούς τόπους συχνοτήτων αποκοπής, προσδιορίζοντας κύκλους που στο εσωτερικό τους περικλείουν συγκεκριμένες ποσότητες συνολικής ισχύος εικόνας με τιμή P_T .

$$P_T = \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{v=0}^{Q-1} P(u, v)$$

- Εάν ο μετασχηματισμός Fourier είναι κεντραρισμένος, ένας κύκλος με ακτίνα D_0 και κέντρο, το κέντρο του τετραγώνου των συχνοτήτων περικλείει ποσοστό της συνολικής ισχύος της εικόνας ίσο με:

$$\alpha = 100 \left[\sum_u \sum_v \frac{P(u, v)}{P_T} \right]$$

Σύγκριση κατωδιαβατών φίλτρων



(α) δοκιμαστική εικόνα 688X688 (β) το φάσμα της. Το φάσμα είναι διπλάσιο σε μέγεθος από την εικόνα καθώς έχει συμπληρωθεί με μηδενικά, απεικονίζεται το μισό μέγεθος για λόγους ομοιομορφίας. Οι κύκλοι έχουν ακτίνες 10, 30, 60, 160 και 460 pixels. Η ισχύς που περικλείεται είναι αντίστοιχα το 86.9%, 92.8%, 95.1%, 97.6%, 99.4% της ισχύος της συμπληρωμένης εικόνας.

Εξομάλυνση εικόνας με ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο

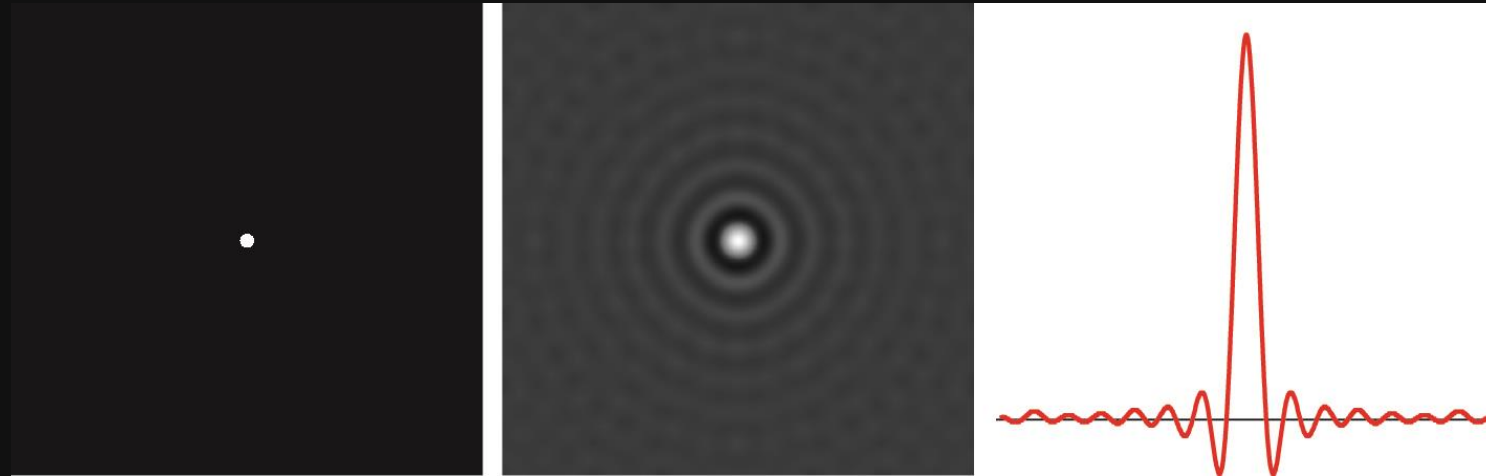
(α) αυθεντική εικόνα διαστάσεων 688X688
(β) – (στ) αποτελέσματα φιλτραρίσματος με χρήση ιδανικών κατωδιαβατών φίλτρων με συχνότητες αποκοπής στις τιμές 10, 30, 60, 160, 460. Η ισχύς που απομακρύνθηκε είναι αντίστοιχα ίση με 13.1%, 7.2%, 4.9%, 2.4% και 0.6% της συνολικής ισχύος αντίστοιχα. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε κατοπτρικό γέμισμα για αποφυγή εμφάνισης μαύρου περιγράμματος στην εικόνα.



Εξομάλυνση εικόνας με ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο

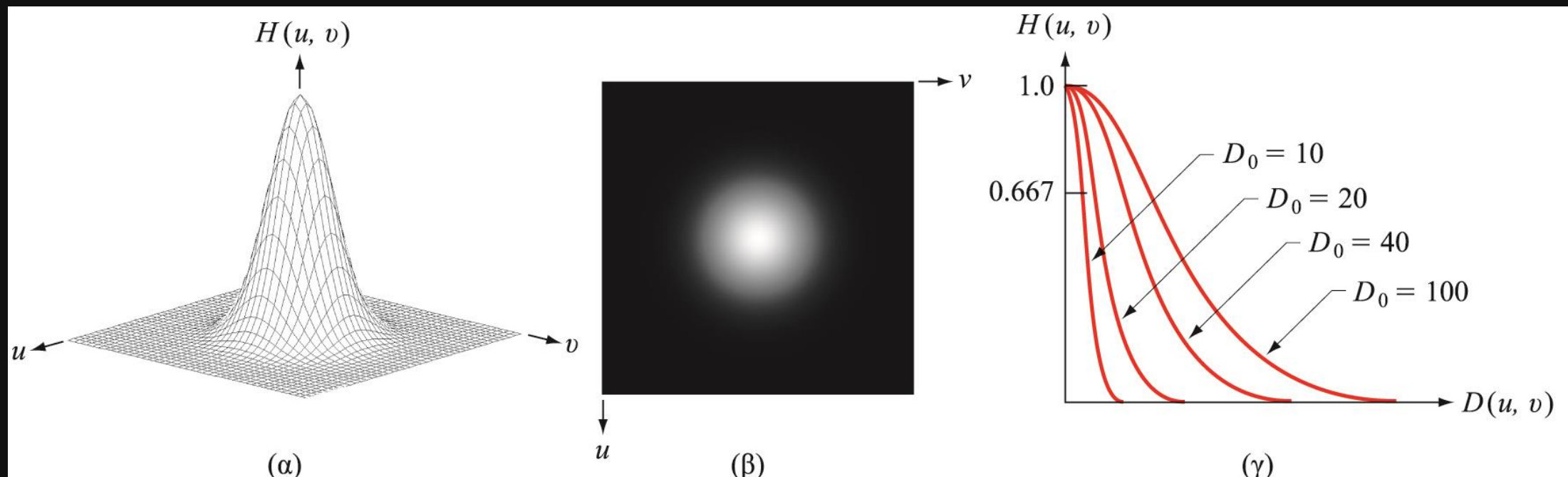
- Η πρώτη εικόνα είναι παντελώς άχρηστη, εκτός αν μας ενδιαφέρει να κρατήσουμε τους «σβώλους» που αναπαριστούν τα πιο μεγάλα αντικείμενα μέσα σε αυτή
- Η περισσότερη πληροφορία της εικόνας βρίσκεται μέσα στο 13% της ισχύος που απομακρύναμε
- Οι εικόνες (γ)-(ε) χαρακτηρίζονται από το φαινόμενο του «κωδωνισμού» που προοδευτικά μειώνεται. Αυτό το φαινόμενο δημιουργείται στα ιδανικά φίλτρα
- Το τελευταίο φίλτρο έχει ισχυρή θόλωση στα τετράγωνα με θόρυβο, αλλά στο περισσότερο μέρος της είναι πολύ κοντά στην αρχική εικόνα. Δηλαδή το 0.6% της ισχύος που διώξαμε δεν έχει πληροφορίες για τις ακμές της εικόνας.
- Προκύπτει ότι το φιλτράρισμα με ιδανικά φίλτρα δεν είναι πρακτικό.

Το φαινόμενο του κωδωνισμού



(α) αναπαράσταση στο πεδίο του χώρου ενός ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου (β) η χωρική αναπαράσταση $h(x,y)$ συνάρτησης μεταφοράς ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου που προέκυψε μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier της (α). Φαίνεται το φαινόμενο κωδωνισμού. (γ) το προφίλ της έντασης μιας οριζόντιας γραμμής που διέρχεται από το κέντρο της εικόνας (β).

Κατωδιαβατά φίλτρα τύπου Gauss



(α) προοπτικό διάγραμμα της συνάρτησης μεταφοράς κατωδιαβατού φίλτρου τύπου Gauss (β) το φίλτρο με την μορφή εικόνας (γ) ακτινικές διατομές του φίλτρου για διάφορες τιμές

- Οι συναρτήσεις μεταφοράς τους έχουν την μορφή $H(u, v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$, $D(u,v)$ η απόσταση από το κέντρο μέχρι το (u,v) σημείο.
- Το μέγεθος σ αποτελεί μέτρο της διακύμανσης ως προς το κέντρο. Αν θέσουμε $\sigma=D_0$, προκύπτει η μορφή $H(u, v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$
- με D_0 η συχνότητα αποκοπής.

Εξομάλυνση εικόνας με κατωδιαβατό φίλτρο τύπου Gauss

(α) αυθεντική εικόνα διαστάσεων 688X688

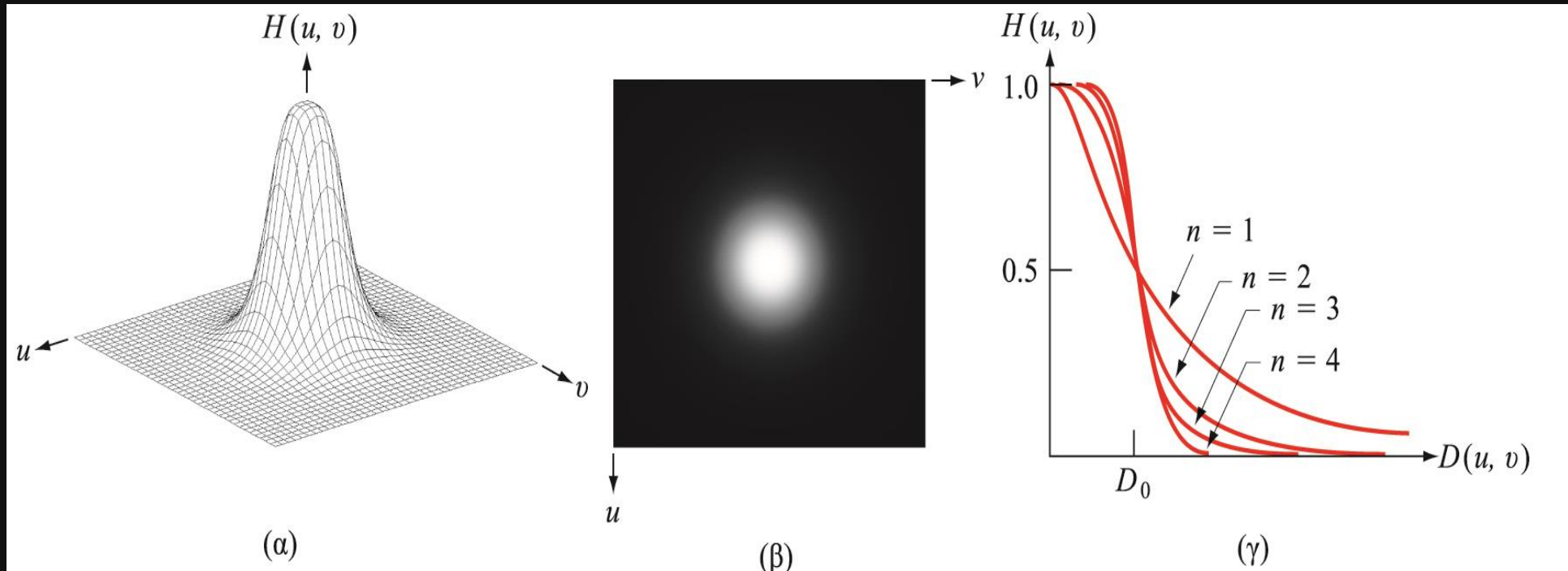
(β) – (στ) αποτελέσματα φιλτραρίσματος με χρήση κατωδιαβατών φίλτρων τύπου Gauss με συχνότητες αποκοπής στις τιμές 10, 30, 60, 160, 460. Η ισχύς που απομακρύνθηκε είναι αντίστοιχα ίση με 13.1%, 7.2%, 4.9%, 2.4% και 0.6% της συνολικής ισχύος αντίστοιχα. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε κατοπτρικό γέμισμα για αποφυγή εμφάνισης μαύρου περιγράμματος στην εικόνα.



Εξομάλυνση εικόνας με κατωδιαβατό φίλτρο τύπου Gauss

- Επειδή ο αντίστροφος μετασχηματισμός του φίλτρου Gauss είναι ένα νέο φίλτρο Gauss, δεν έχουμε εμφάνιση φαινομένων κωδωνισμού (απαιτούμενο σε ιατρικές εφαρμογές)
- Προσφέρει μικρότερη εξομάλυνση σε σχέση με το ιδανικό φίλτρο
- Δεν έχουμε απόλυτο έλεγχο στην μετάπτωση ανάμεσα στις υψηλές και χαμηλές συχνότητες

Κατωδιαβατά φίλτρα τύπου Butterworth



(α) προοπτικό διάγραμμα της συνάρτησης μεταφοράς κατωδιαβατού φίλτρου τύπου Butterworth (β) το φίλτρο με την μορφή εικόνας (γ) ακτινικές διατομές του φίλτρου για τιμές τάξης από 1 ως 4

- Οι συναρτήσεις μεταφοράς τους έχουν την μορφή $H(u, v) = 1 / (1 + [\frac{D(u, v)}{D_0}]^{2n})$
- Μπορεί να ελεγχθεί καλύτερα για να προσεγγίσει το ιδανικό φίλτρο με σημαντικά μικρότερο κωδωνισμό

Εξομάλυνση εικόνας με κατωδιαβατό φίλτρο τύπου Butterworth

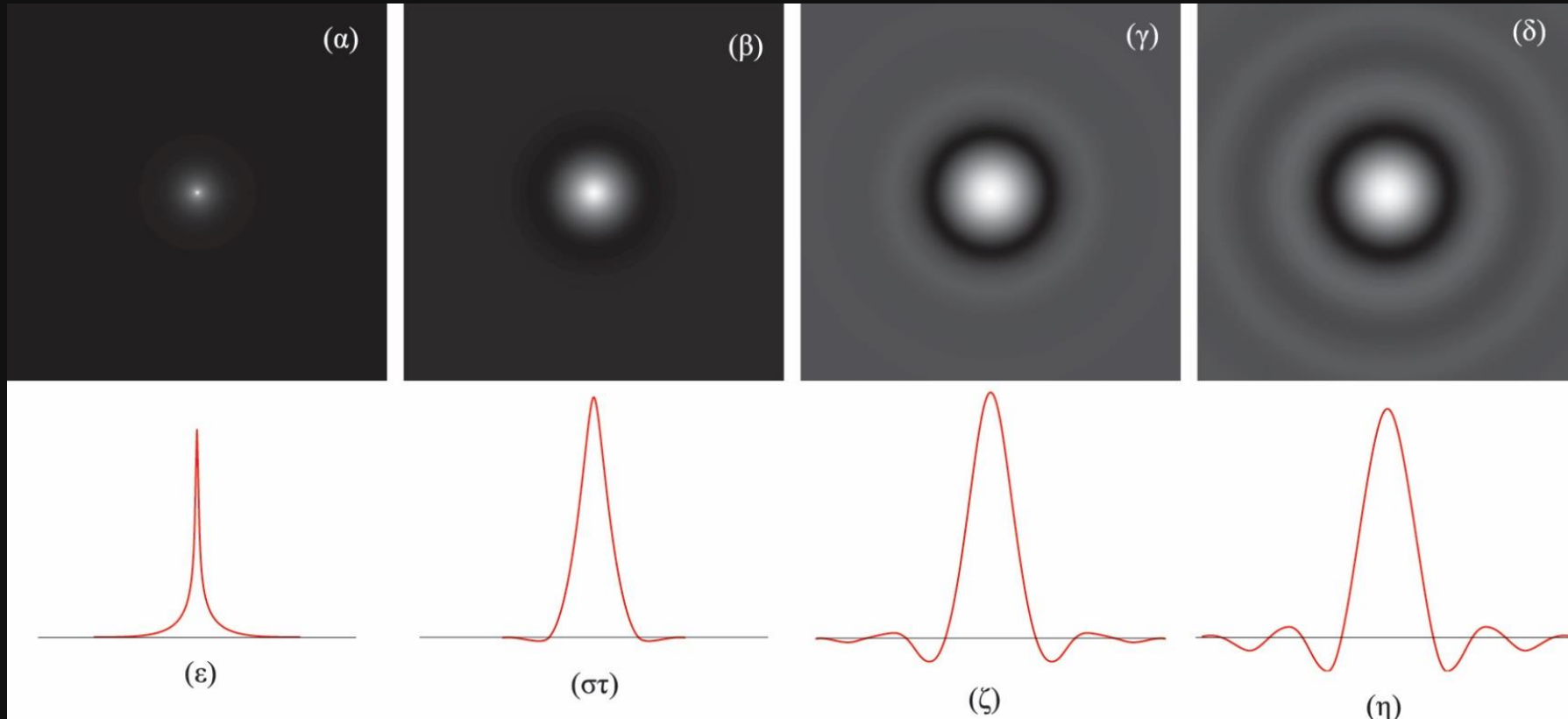
(α) αυθεντική εικόνα διαστάσεων 688x688
(β) – (στ) αποτελέσματα φιλτραρίσματος με χρήση κατωδιαβατών φίλτρων τύπου Butterworth τάξης $n=2.25$ με συχνότητες αποκοπής στις τιμές 10, 30, 60, 160, 460. Η ισχύς που απομακρύνθηκε είναι αντίστοιχα ίση με 13.1%, 7.2%, 4.9%, 2.4% και 0.6% της συνολικής ισχύος αντίστοιχα. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε κατοπτρικό γέμισμα για αποφυγή εμφάνισης μαύρου περιγράμματος στην εικόνα.



Εξομάλυνση εικόνας με κατωδιαβατό φίλτρο τύπου Butterworth

- Τα αποτελέσματα του φίλτρου αυτού είναι ανάμεσα στα δύο προηγούμενα φίλτρα
- Η θόλωση που προκαλείται είναι μικρότερη από το ιδανικό, αλλά μεγαλύτερη από το Gauss
- Όσο μεγαλώνει η τάξη του φίλτρου μεγαλώνει το φαινόμενο του κωδωνισμού
- Επιπλέον με αύξηση της τάξης, παρατηρούμε και εμφάνιση αρνητικών συντελεστών
- Στην πράξη χρησιμοποιούνται φίλτρα τάξης $n=2$ ως 3

Χαρακτηριστικά κατωδιαβατού φίλτρου τύπου Butterworth

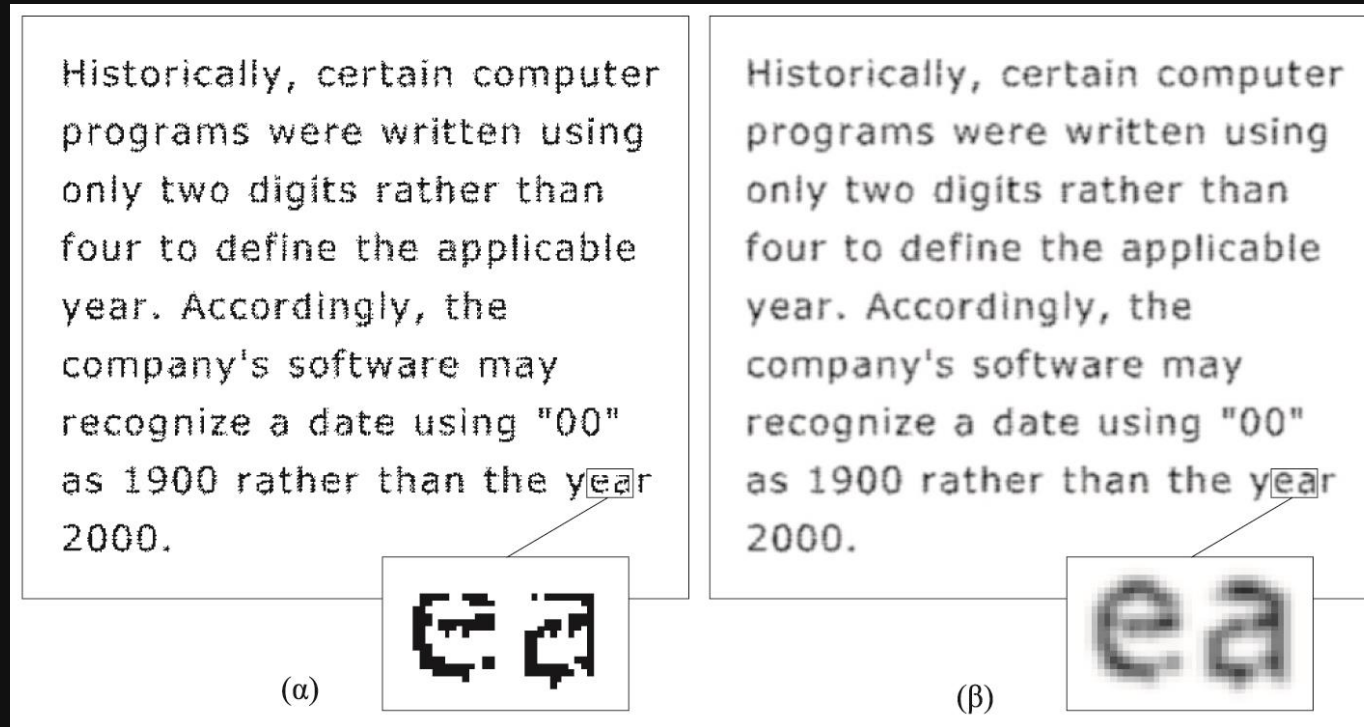


(α)-(δ) χωρικές αναπαραστάσεις που αντιστοιχούν σε συναρτήσεις μεταφοράς φίλτρων Butterworth μεγέθους 1000×1000 με συχνότητα αποκοπής ίση με 5 και τιμές τάξης 1, 2, 5 και 20 αντίστοιχα. (ε)-(στ) τα αντίστοιχα προφίλ έντασης δια μέσου των κέντρων των συναρτήσεων των φίλτρων

Κατωδιαβατά φίλτρα – Σύγκριση

Ιδανικό φίλτρο	Φίλτρο τύπου Butterworth	Φίλτρο τύπου Gauss
$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{εάν } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$	$H(u, v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

Πρόσθετα παραδείγματα χαμηλοπερατών φίλτρων



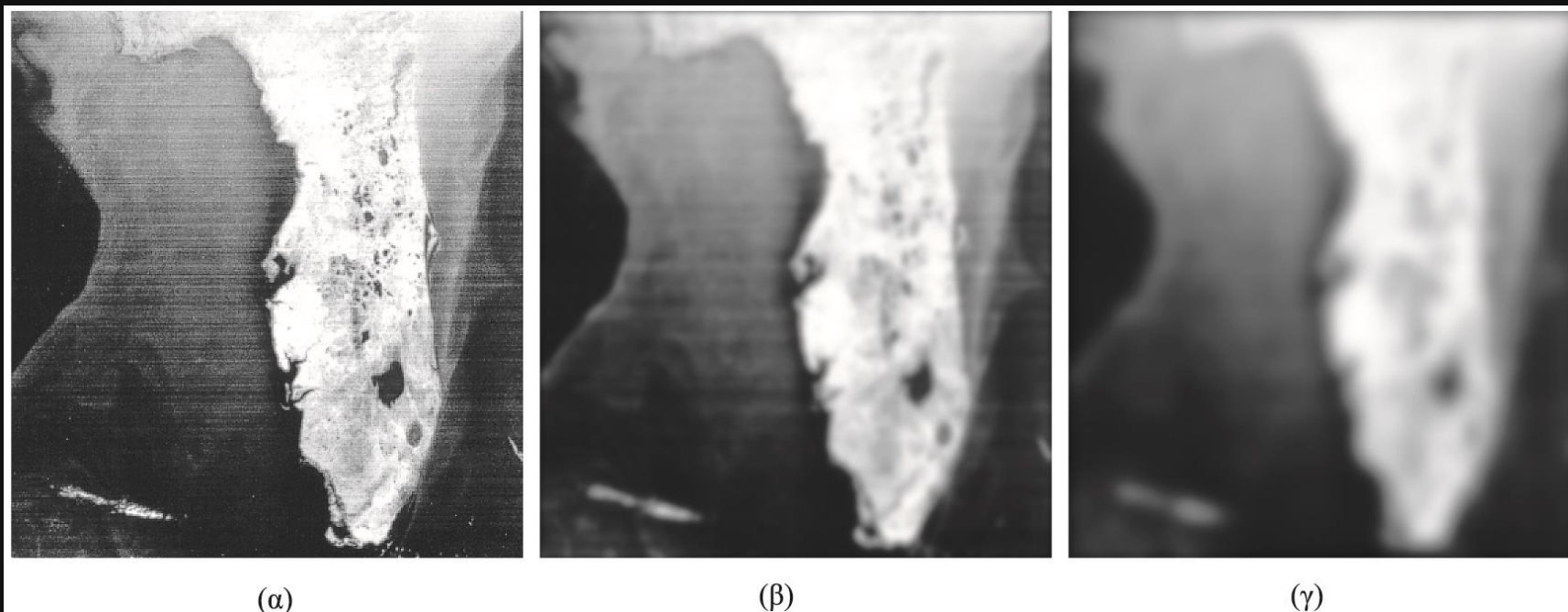
(α) κείμενο χαμηλής ανάλυσης (β) αποτέλεσμα φιλτραρίσματος με κατωδιαβατό φίλτρο Gauss με $D_o = 120$.

Πρόσθετα παραδείγματα χαμηλοπερατών φίλτρων



(α) αρχική εικόνα 785X732 εικονοστοιχείων (β) το αποτέλεσμα φιλτραρίσματος με κατωδιαβατό φίλτρο τύπου Gauss με $D_0 = 150$. (γ) το αποτέλεσμα φιλτραρίσματος με $D_0 = 130$.

Πρόσθετα παραδείγματα χαμηλοπερατών φίλτρων



(α) δορυφορική εικόνα διαστάσεων 808X754 εικονοστοιχείων με εμφανείς οριζόντιες γραμμές σάρωσης (β) το αποτέλεσμα φιλτραρίσματος με κατωδιαβατό φίλτρο τύπου Gauss με $D_o = 50$. (γ) το αποτέλεσμα φιλτραρίσματος με $D_o = 20$.

Όξυνση εικόνας με χρήση ανωδιαβατών φίλτρων

- Επειδή οι ακμές σχετίζονται με υψηλές τιμές συχνοτικών συνιστωσών, η αύξηση της οξύτητας μπορεί να επιτευχθεί στην συχνότητα με εφαρμογή ανωδιαβατών φίλτρων
- Αυτό το φίλτρο εξασθενεί τις χαμηλές συχνότητες χωρίς να αλλοιώνει την πληροφορία του μετασχηματισμού Fourier στις υψηλές.

Κατασκευή ανωδιαβατών φίλτρων από κατωδιαβατά

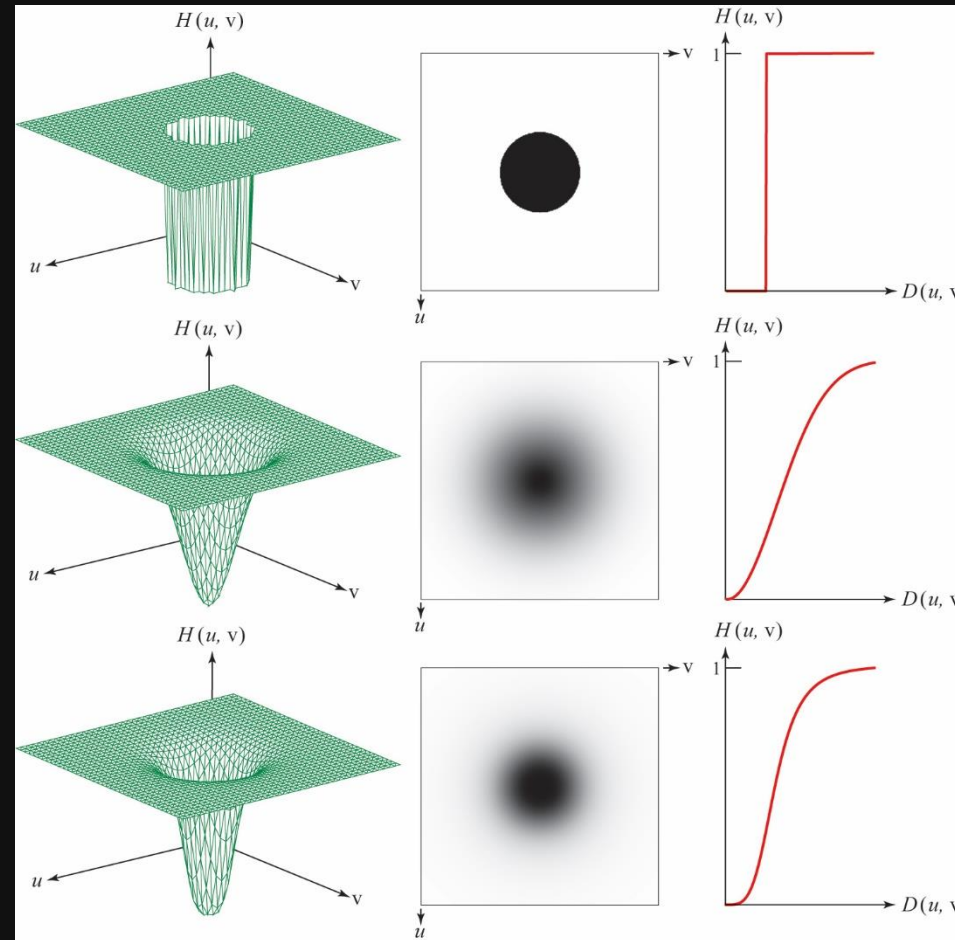
προοπτικό διάγραμμα, αναπαράσταση με τη μορφή εικόνας και διατομή μιας συνάρτησης μεταφοράς:

- (α) ιδανικού ανωδιαβατού φίλτρου
- (β) ανωδιαβατού φίλτρου Butterworth
- (γ) ανωδιαβατού φίλτρου Gauss

Ο χωρικός πυρήνας που αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς ανωδιαβατού φίλτρου στο πεδίο της συχνότητας δίνεται από την:

$$H_{HP} = 1 - H_{LP}(u, v)$$

$$h_{HP} = \delta(x, y) - h_{LP}(u, v)$$



Ανωδιαβατά φίλτρα – Σύγκριση

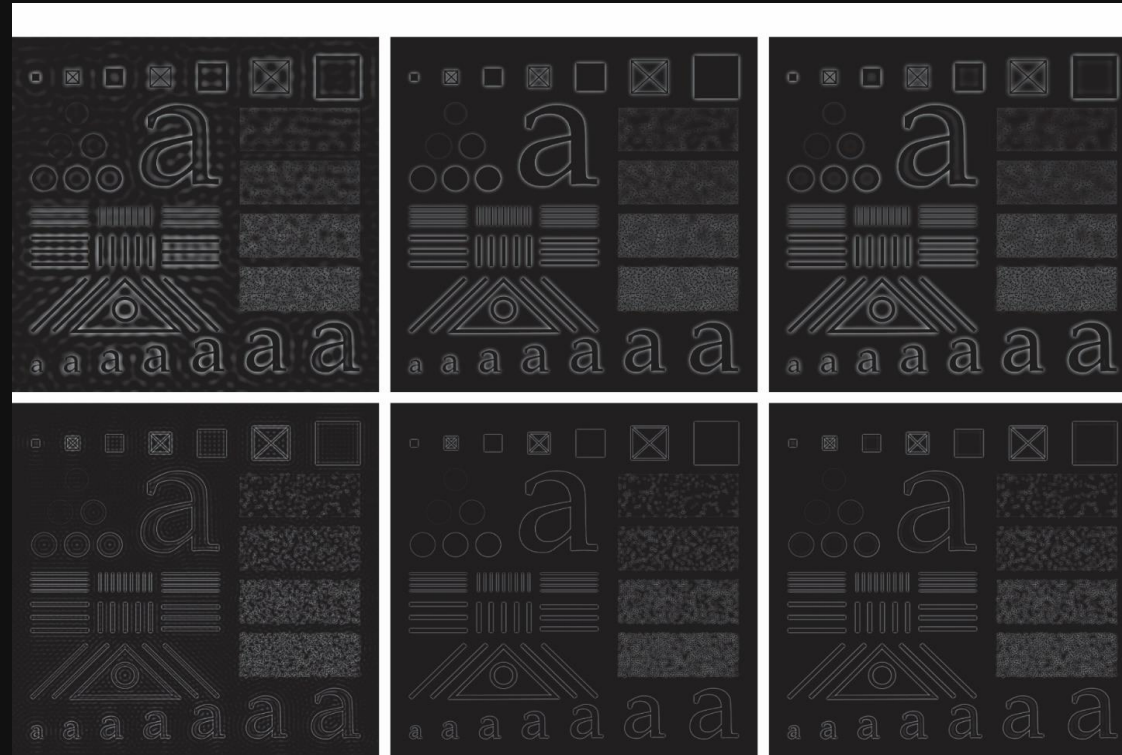
Ιδανικό φίλτρο	Φίλτρο τύπου Gauss	Φίλτρο τύπου Butterworth
$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } D(u, v) \geq D_0 \\ 0 & \text{εάν } D(u, v) < D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$

Πυρήνες χωρικών ανωδιαβατών φίλτρων



πυρήνες χωρικών φίλτρων και οριζόντια προφίλ έντασης για το ιδανικό, τύπου Gauss και Butterworth ανωδιαβατά φίλτρα που προκύπτουν από τις αντίστοιχες συναρτήσεις μεταφοράς του πεδίου της συχνότητας.

Παραδείγματα εφαρμογής ανωδιαβατών φίλτρων



Η δοκιμαστική εικόνα φιλτραρισμένη με τις συναρτήσεις μεταφοράς του ιδανικού ανωδιαβατού φίλτρου και των Gauss και Butterworth με $D_0 = 60$ και $n = 2$.

Στην κάτω γραμμή, τα αποτελέσματα για τα ίδια φίλτρα αλλά τιμή παραμέτρου $D_0 = 160$

Ανάλυση αποτελεσμάτων

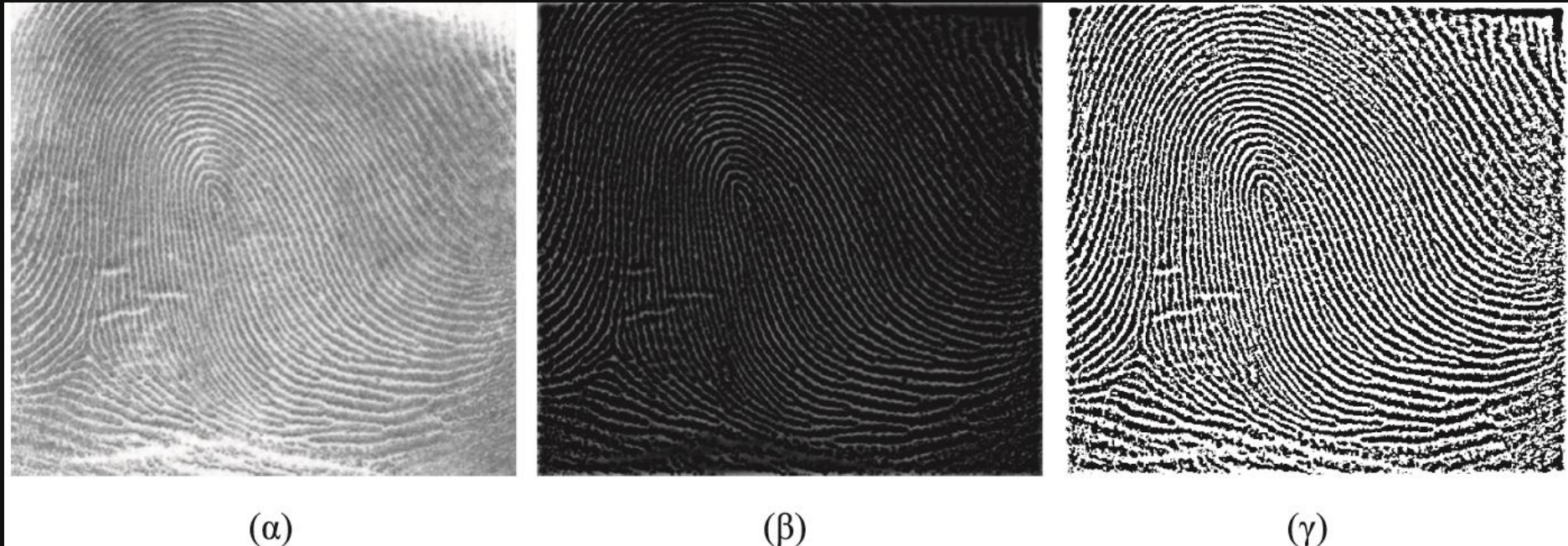
- Το ιδανικό φίλτρο οδήγησε σε αποτελέσματα με ατέλειες και κωδωνισμούς
- Τα φίλτρα κατάφεραν να αφαιρέσουν το 95% περίπου της ενέργειας της εικόνας
- Η αφαίρεση χαμηλών συχνοτήτων έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση του περιεχομένου σε αποχρώσεις του γκρι αφήνοντας τις ακμές και άλλες απότομες μεταπτώσεις
- Οι λεπτομέρειες της εικόνας περιλαμβάνονται στο 5% της ενέργειας της.
- Τα αποτελέσματα της δεύτερης γραμμής δείχνουν εικόνες στις οποίες έχει παραμείνει το 2.5% ή το μισό από αυτό που έχουν οι εικόνες της πρώτης γραμμής.
- Η διαφορά είναι μεγάλη: τα περιγράμματα είναι πιο καθαρά για τα φίλτρα Gauss και Butterworth

Πρόσθετα παραδείγματα χαμηλοπερατών φίλτρων



Τα αποτελέσματα της δεύτερης γραμμής, κλιμακωμένα ώστε να εμφανιστούν οι θετικές και οι αρνητικές τιμές της έντασης. Στην (α) είναι εμφανές το πρόβλημα του κωδωνισμού.

Πρόσθετα παραδείγματα ανωδιαβατού φιλτραρίσματος



(α) εικόνα δακτυλικού αποτυπώματος με ατέλειες (β) το αποτέλεσμα ανωδιαβατού φιλτραρίσματος Butterworth 4ης τάξης με συχνότητα αποκοπής ίση με 50 (γ) εφαρμογή κατωφλίωσης με ανάθεση μαύρου (μη μηδενική τιμή) τις αρνητικές τιμές και λευκό όλες τις υπόλοιπες.

Η Λαπλασιανή στο πεδίο της συχνότητας

- Η Λαπλασιανή μπορεί να υλοποιηθεί στο πεδίο της συχνότητας με το φίλτρο

$$H(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$$

- Έναλλακτικά ως προς το κέντρο του τετραγώνου των συχνοτήτων

$$H(u, v) = -4\pi^2 \left[\left(u - \frac{P}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2}\right)^2 \right] = -4\pi^2 D^2(u, v)$$

- Χρησιμοποιώντας αυτή τη συνάρτηση μεταφοράς μπορούμε να υπολογίσουμε την Λαπλασιανή μιας εικόνας ως:

$$\nabla^2 f(x, y) = F^{-1}\{H(u, v)F(u, v)\}$$

$$g(x, y) = f(x, y) + c\nabla^2 f(x, y)$$

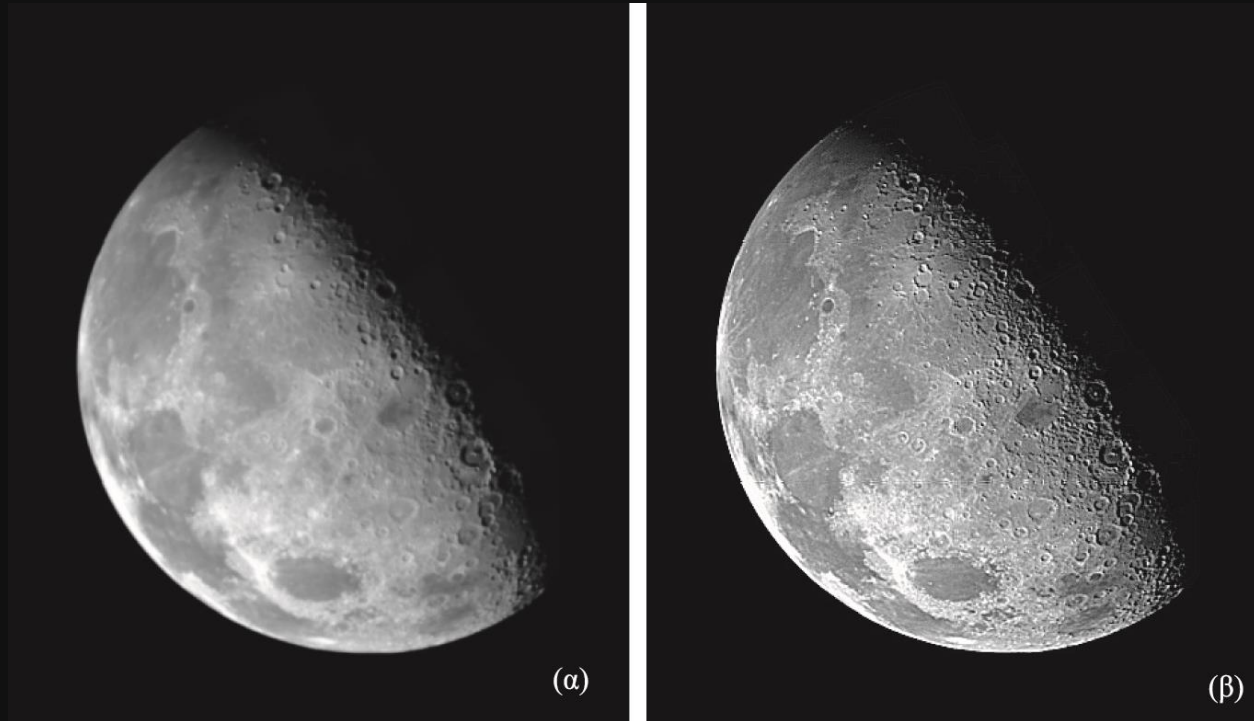
εδώ η παράμετρος $c=-1$ επειδή $H(u,v)$ είναι αρνητική.

Η Λαπλασιανή στο πεδίο της συχνότητας

- στην προηγούμενη σχέση, η εικόνα και το $\nabla^2 f(x, y)$ δεν έχουν συγκρίσιμες τιμές.
- για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα αυτό:
 - ▣ κανονικοποιούμε τις τιμές της εικόνας στο διάστημα $[0, 1]$
 - ▣ διαιρούμε το $\nabla^2 f(x, y)$ με την μέγιστη τιμή του (οι τιμές του βρίσκονται στο διάστημα $[-1, 1]$)
- μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$g(x, y) = f(x, y) + c\nabla^2 f(x, y)$$

Όξυνση με χρήση Λαπλασιανής



(α) θολωμένη εικόνα (β) εικόνα που έχει βελτιωθεί με χρήση Λαπλασιανής στο πεδίο της συχνότητας. Η εικόνα παρουσιάζει μεγαλύτερη οξύτητα από αυτή στο πεδίο του χώρου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο Λαπλασιανός πυρήνας περικλείει μια μικρή γειτονιά, ενώ στη συχνότητα περικλείει ολόκληρη την εικόνα.

Φιλτράρισμα με έμφαση στις υψηλες συχνότητες

- Το φίλτρο με έμφαση στις υψηλές συχνότητες δίνεται με τη βοήθεια ενός ανωδιαβατού φίλτρου

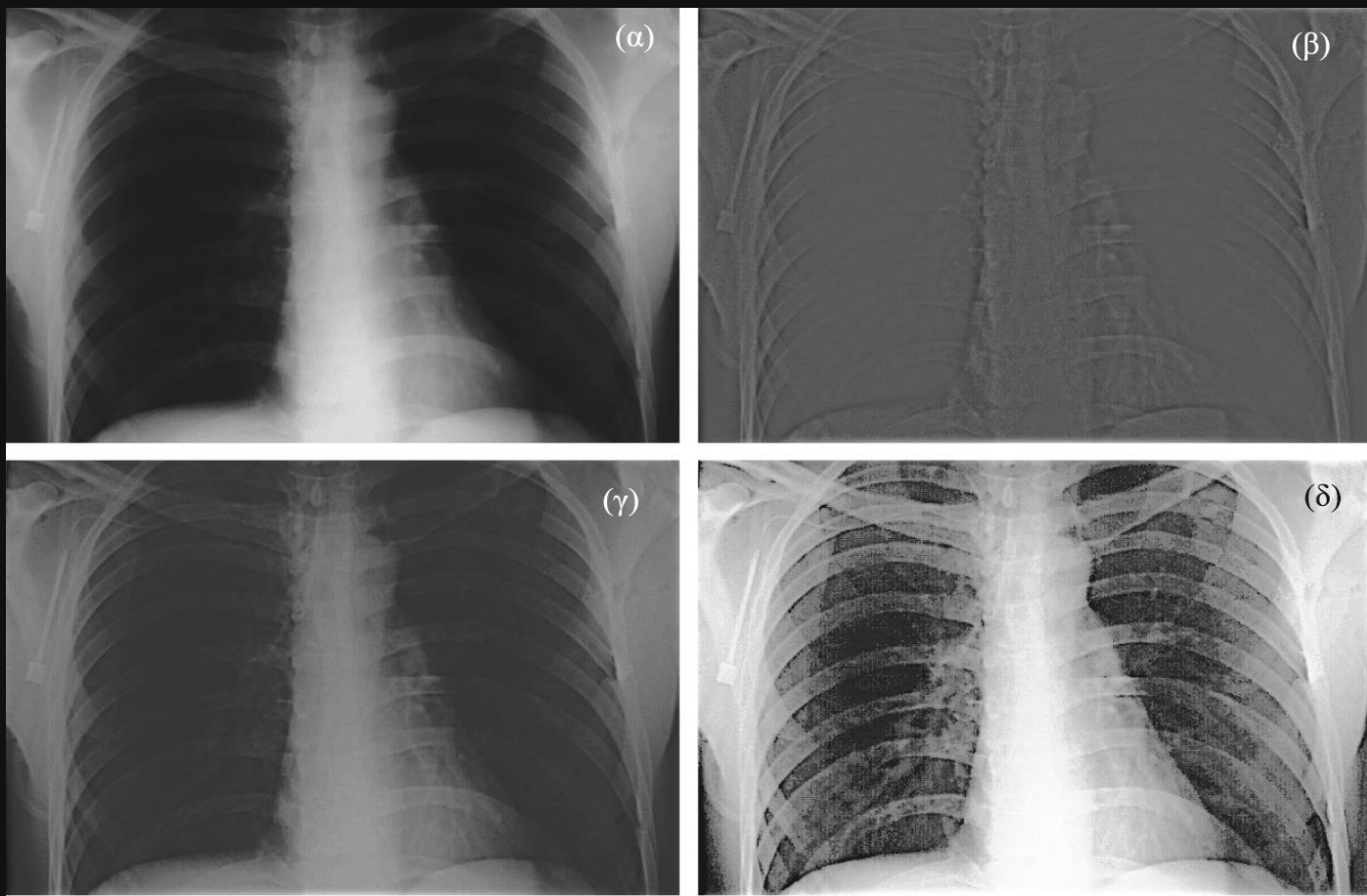
$$g(x, y) = F^{-1}\{[1 + k * H_{HP}(u, v)]F(u, v)\}$$

- Γνωρίζουμε ότι το ανωδιαβατό φίλτρο θέτει το συνεχή όρο του μετασχηματισμού Fourier στη μηδενική τιμή, οδηγώντας έτσι σε ελάττωση της μέσης έντασης της φιλτραρισμένης εικόνας μέχρι την μηδενική τιμή.
- Ο τύπος αυτός δεν έχει αυτό το πρόβλημα εξαιτίας του όρου με τιμή ίση με μονάδα που προστίθεται στο ανωδιαβατό φίλτρο
- Μια πιο γενική διατύπωση του πιο πάνω δίνεται από την εξίσωση:

$$g(x, y) = F^{-1}\{[k_1 + k_2 * H_{HP}(u, v)]F(u, v)\}$$

με $k_1 \geq 0$ παράμετρο η οποία επιτρέπει να κρατήσουμε τον όρο dc, και $k_2 > 0$ παράμετρο η οποία ελέγχει την συνεισφορά των υψηλών συχνοτήτων

Ενίσχυση εικόνας με χρήση φίλτρου έμφασης υψηλών συχνοτήτων



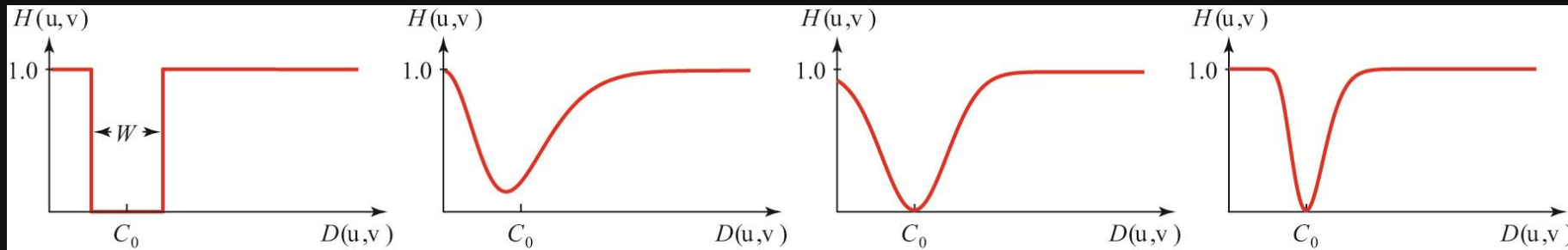
(α) μια ακτινογραφία θώρακα (β) αποτέλεσμα ανωδιαβατού φιλτραρίσματος με φίλτρο Gauss και $D=70$ (γ) αποτέλεσμα χρήσης φίλτρου έμφασης υψηλών συχνοτήτων με $k_1=0.5$, $k_2=0.75$ (δ) αποτέλεσμα εξίσωσης ιστογράμματος της προηγούμενης εικόνας

Επιλεκτικό φιλτράρισμα – Ζωνοφρακτικά και ζωνοδιαβατά φίλτρα

Ιδανικό	Τύπου Gauss	Τύπου Butterworth
$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } C_0 - \frac{W}{2} \leq D(u,v) \leq C_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$	$H(u,v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2(u,v) - C_0^2}{D(u,v)W}\right]^2}$	$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u,v)W}{D^2(u,v) - C_0^2}\right]^{2n}}$

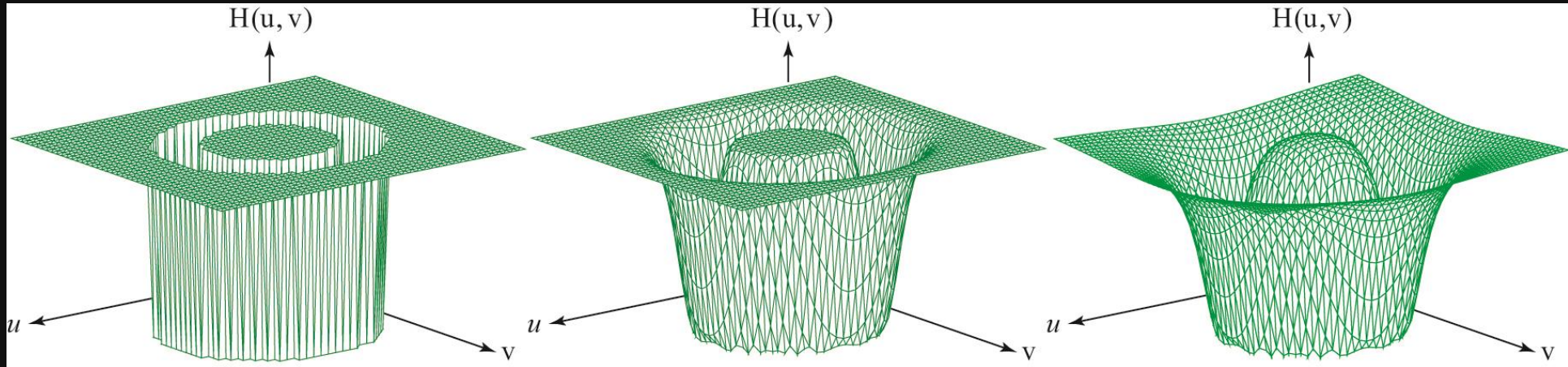
Συναρτήσεις μεταφοράς ζωνοφρακτικών φίλτρων. Το C_0 είναι το κέντρο της ζώνης, W είναι το εύρος της ζώνης και $D(u,v)$ είναι η απόσταση από το κέντρο της συνάρτησης μεταφοράς έως ένα σημείο (u,v) στο ορθογώνιο των συχνοτήτων

Επιλεκτικό φιλτράρισμα



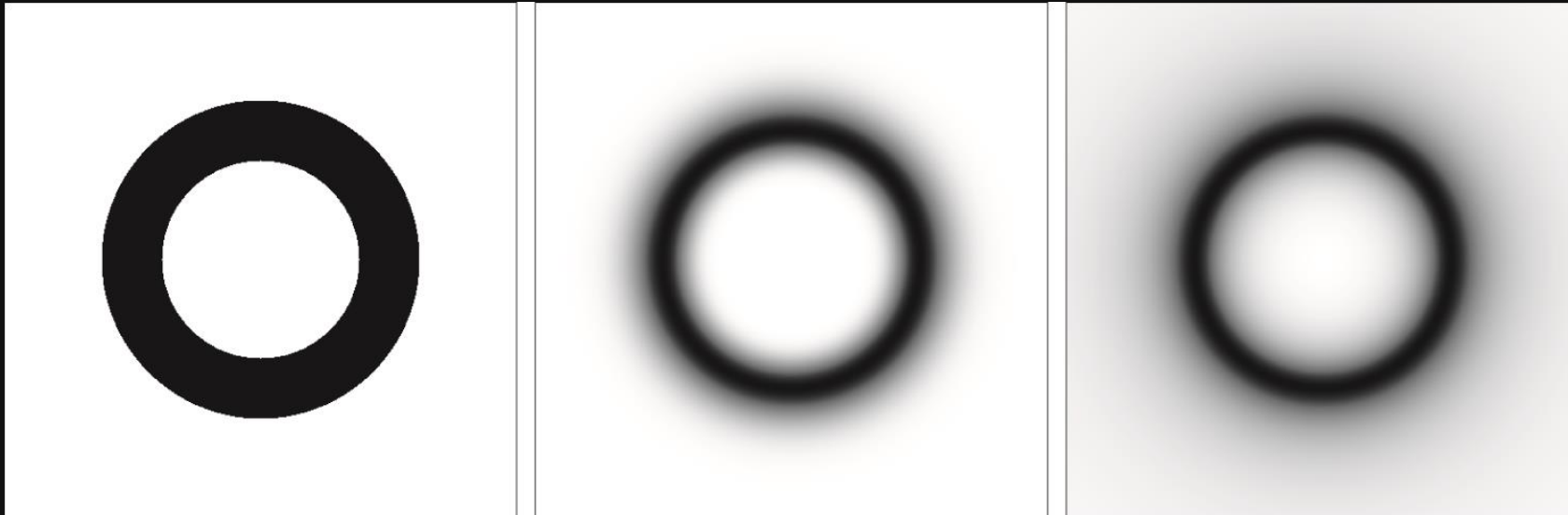
- Η πρόσθεση κατωδιαβατών και ανωδιαβατών φίλτρων για την δημιουργία ζωνοφρακτικών ή ζωνοδιαβατών είναι δύσκολη (βλέπε περίπτωση β)
- Δεν έχουμε απόλυτο έλεγχο στην τιμή του W αλλά και στον μηδενισμό στην θέση C_0
- Μπορεί να υπολογιστεί με δοκιμές αλλά αναλυτική λύση για το Gauss φίλτρο είναι αδύνατη

Επιλεκτικό φιλτράρισμα



Γραφήματα συναρτήσεων μεταφοράς (α) ιδανικού ζωνοφρακτικού φίλτρου (β) τροποποιημένου ζωνοφρακτικού τύπου Gauss (γ) τροποποιημένου ζωνοφρακτικού τύπου Butterworth. Οι συναρτήσεις έχουν μέγεθος 512×512 , $C_0=128$ και $W=60$

Πρόσθετα παραδείγματα χαμηλοπερατών φίλτρων



Οι συναρτήσεις μεταφοράς (α) ιδανικού ζωνοφρακτικού φίλτρου (β) τροποποιημένου ζωνοφρακτικού τύπου Gauss (γ) τροποποιημένου ζωνοφρακτικού τύπου Butterworth.

Φίλτρα εγκοπής (notch filters)

- Είναι τα πιο ενδιαφέροντα και πιο χρήσιμα φίλτρα επιλογής συχνοτήτων
- Απορρίπτουν (ή επιτρέπουν) συχνότητες οι οποίες ανήκουν σε προκαθορισμένη γειτονιά ως προς το κέντρο του τετραγώνου συχνοτήτων
- Πρέπει να είναι συμμετρικά ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων
- Υπολογίζονται ως γινόμενο ανωδιαβατών φίλτρων των οποίων τα κέντρα έχουν μετατοπιστεί στα κέντρα των εγκοπών

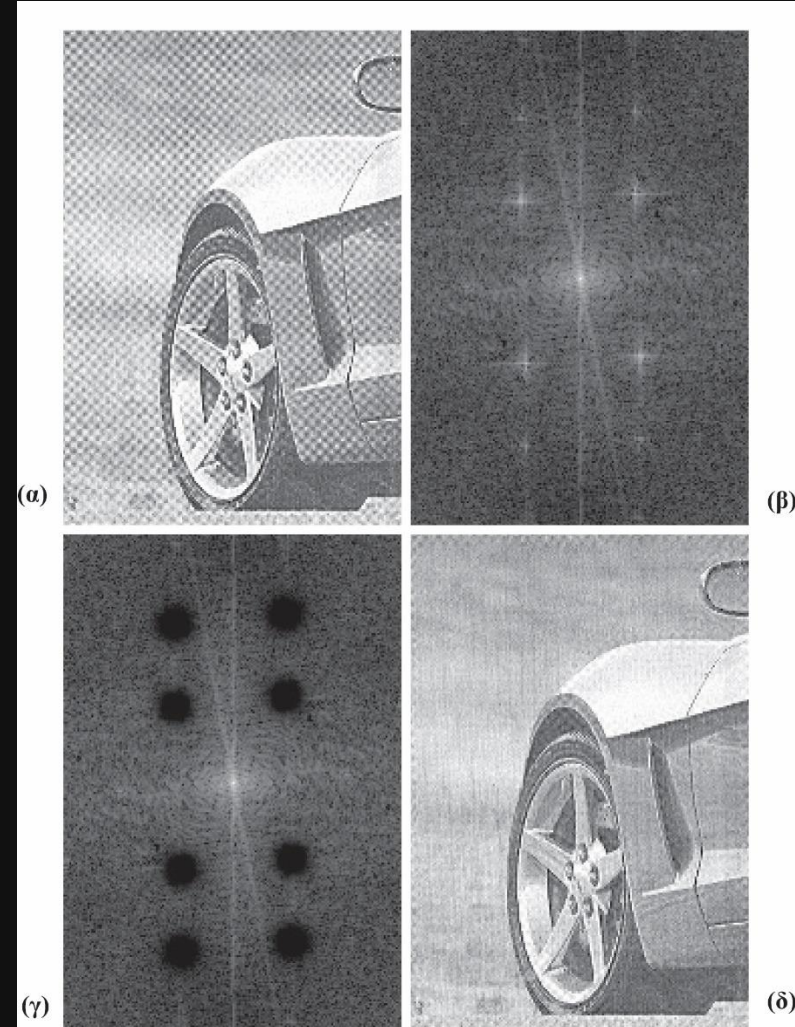
$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) H_{-k}(u, v)$$

για παράδειγμα το παρακάτω το οποίο έχει 3 ζευγάρια συχνοτήτων:

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^3 \frac{1}{1 + \left[\frac{D_{0k}}{D_k(u, v)} \right]^n} \frac{1}{1 + \left[\frac{D_{0k}}{D_{-k}(u, v)} \right]^n}$$

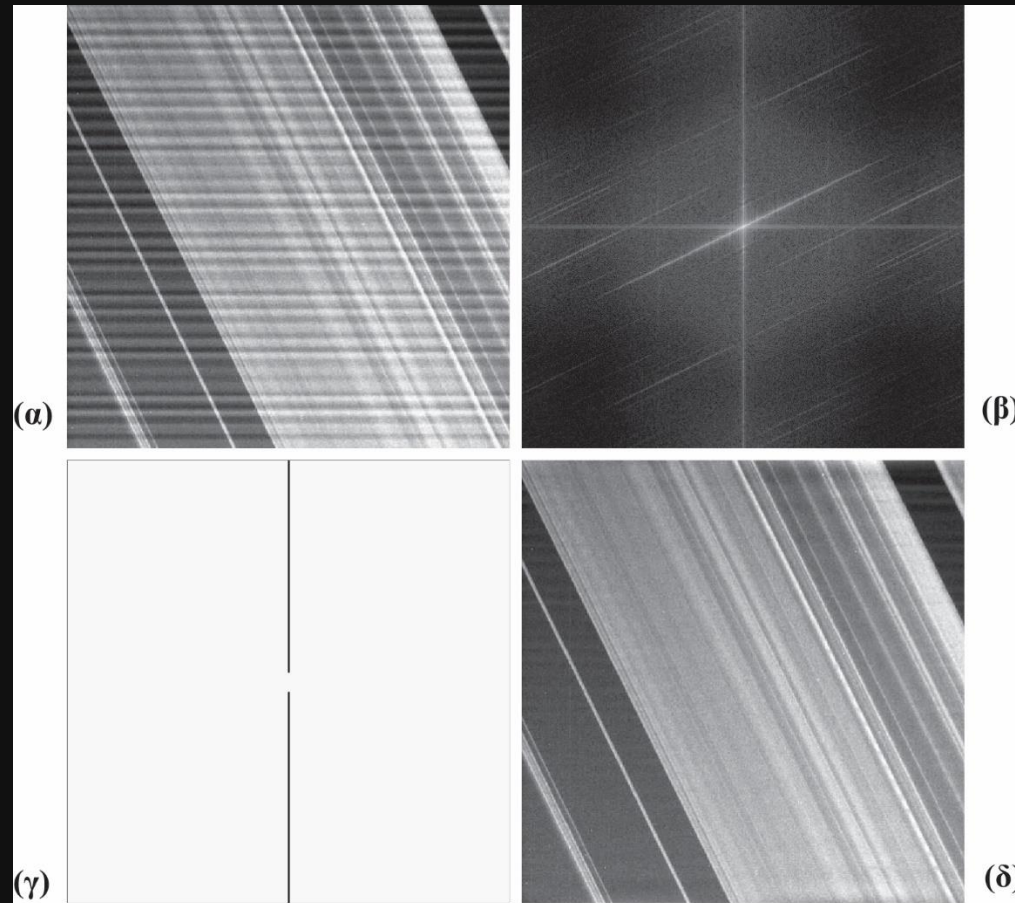
Ελάττωση των κροσσών moire σε ψηφιοποιημένο έντυπο υλικό με χρήση φίλτρων εγκοπής

(α) εικόνα εφημερίδας με εμφανή τα σημάδια κροσσών moire
(β) το φάσμα της εικόνας αυτής
(γ) το φάσμα Fourier πολλαπλασιασμένο με συνάρτηση μεταφοράς ζωνοφρακτικού φίλτρου εγκοπής τύπου Butterworth $D_0=9, n=4$
(δ) φιλτραρισμένη εικόνα

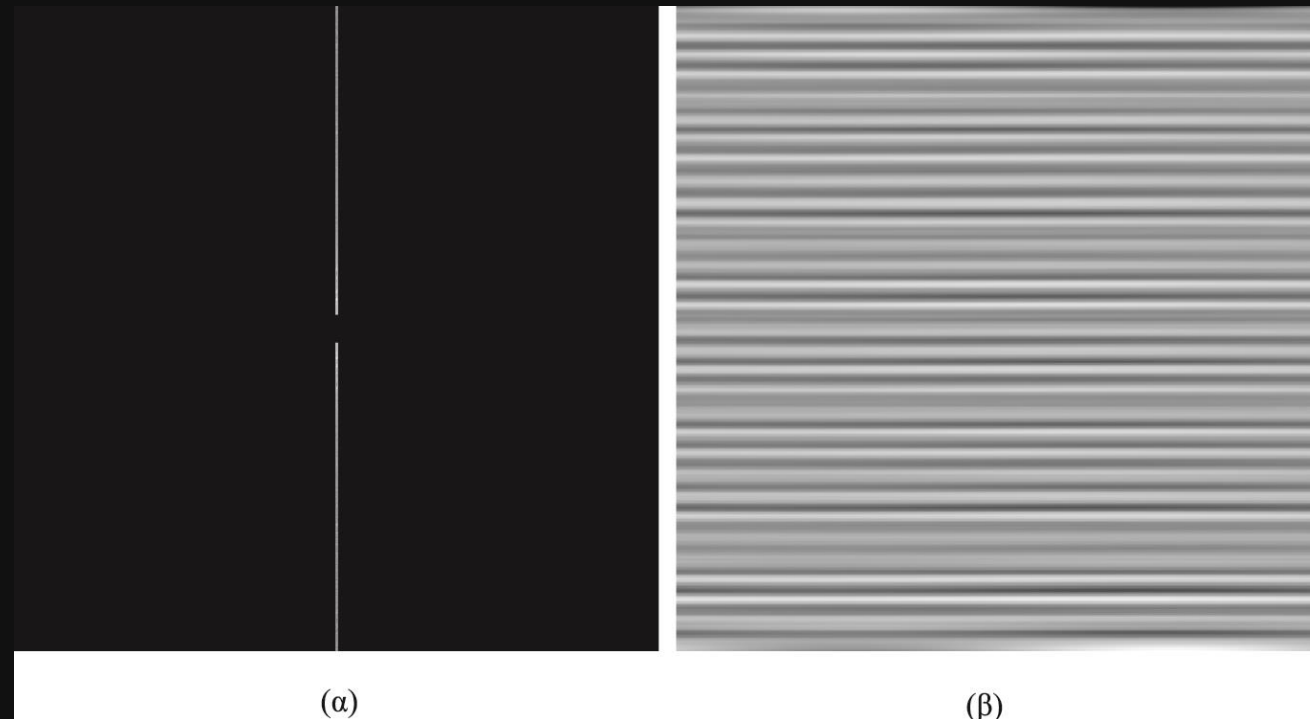


Χρήση φίλτρων εγκοπής για την απομάκρυνση περιοδικής συμβολής

(α) εικόνα δακτυλίων του Κρόνου με σχεδόν περιοδική συμβολή (από Cassini)
(β) φάσμα της εικόνας. Οι ριπές ενέργειας στον κατακόρυφο άξονα και κοντά στην αρχή αντιστοιχούν στον κροσσό συμβολής
(γ) η συνάρτηση μεταφοράς ενός κατακόρυφου ζωνοφρακτικού φίλτρου εγκοπής
(δ) αποτέλεσμα φιλτραρίσματος

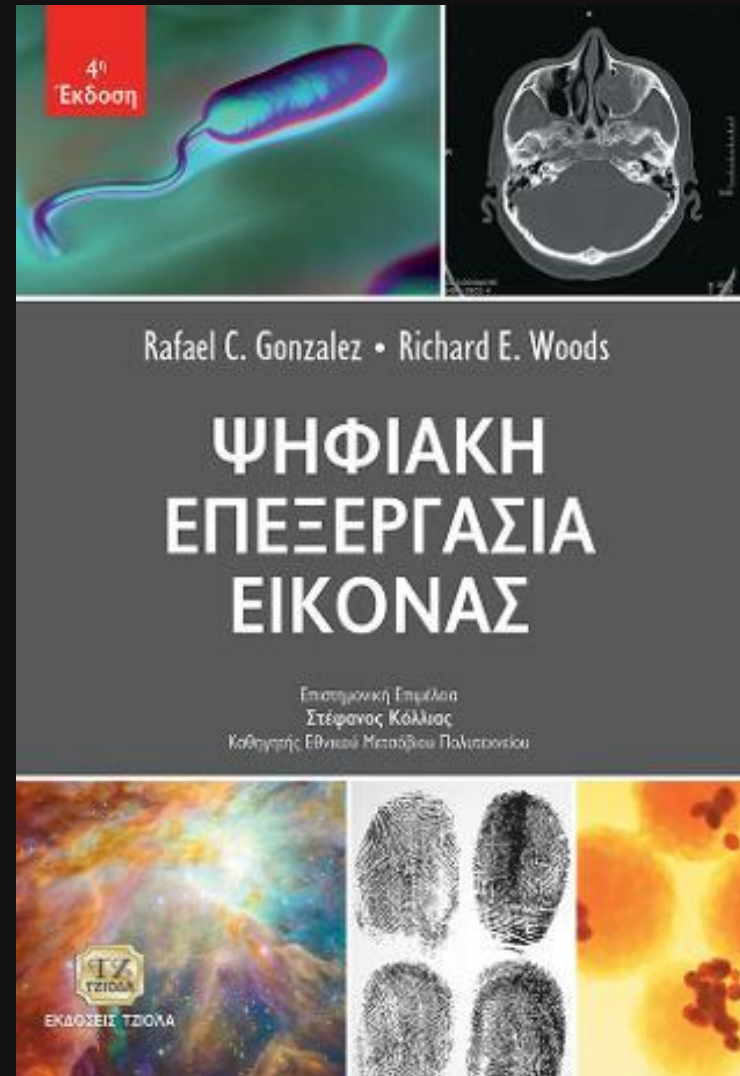


Χρήση φίλτρων εγκοπής για την μελέτη περιοδικής συμβολής



(α) συνάρτηση φίλτρου εγκοπής διέλευσης για την απομόνωση του κατακόρυφου άξονα του μετασχηματισμού DFT της προηγούμενης εικόνας. (β) η χωρική αναπαράσταση του κροσσού συμβολής που υπολογίστηκε από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της εικόνας (α).

Rafael Gonzalez, Richard Woods,
Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας, 4η έκδοση,
Κεφάλαιο 4





<http://www.sippre-group.com>